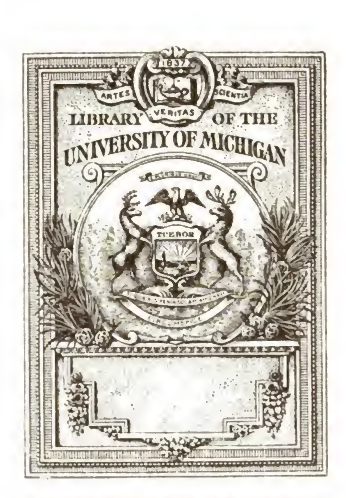
Zwei geometrische abhandlungen: t. Anmerkungen. ..

Nikolaĭ Ivanovich Lobachevskiĭ


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR


Google

Alexander Ziwet

NIKOLAJ IWANOWITSCH

LOBATSCHEFSKIJ.

ZWEI GEOMETRISCHE ABHANDLUNGEN

AUS DEM RUSSISCHEN UEBERSETZT, MIT ANMERKUNGEN UND MIT EINER BIOGRAPHIE DES VERFASSERS

VON

FRIEDRICH ENGEL.

ZWEITER THEIL:

ANMERKUNGEN. LOBATSCHEFSKIJS LEBEN UND SCHRIFTEN. REGISTER.

MIT 67 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1899.



Inhalt des zweiten Theils.

	Seite
Anmerkungen	237—348
Verzeichniss der gebrauchten Abkürzungen	237
I. Zu der Abhandlung: Ueber die Anfangsgründe der Geometrie	238—310
II. Zu der Abhandlung: Neue Anfangsgründe der Geometrie	311—344
III. Einige wichtige Formeln der Lobatschefskijschen Geometrie	345—348
Lobatschefskijs Leben und Schriften	349—422
Einleitung	349—350
Kapitel I. Lobatschefskijs erste Jugend und Universitätsjahre. Sein Lehrer Bartels	351—359
Kapitel II. Lobatschefskijs erste Lehrthätigkeit. Die Zustände an der Universität. Erste Versuche auf dem Gebiete der Geometrie	360—363
Kapitel III. Die Magnizkische Revision und Verwaltung. Lobatschefskijs Lehrthätigkeit während dieser Zeit	363—367
Kapitel IV. Ein ungedrucktes Lehrbuch der Geometrie aus dem Jahre 1823	367—370
Kapitel V. Magnizkijs Sturz. Lobatschefskij legt der physiko-mathematischen Abtheilung seine neue Geometrie vor	370—373
Kapitel VI. Die Entdecker der nichteuklidischen Geometrie: Gauss, Schweikart, Taurinus, Lobatschefskij, J. Bolyai	373—383
Kapitel VII. Lobatschefskij als Rektor der Universität Kasan, 1827—1846	383—392
Kapitel VIII. Lobatschefskijs wissenschaftliche Veröffentlichungen, insbesondre seine geometrischen Arbeiten in der Zeit von 1827—1846	392—401
Kapitel IX. Die letzten Lebensjahre. Lobatschefskij als Mensch und als Lehrer	402—406
Kapitel X. Lobatschefskijs Schreibart. Nachträgliches über seine geometrischen Schriften. Seine Arbeiten auf dem Gebiete der Analysis	407—418
Kapitel XI. Lobatschefskijs Werke vergessen. Späte Anerkennung seiner Leistungen. Gegenwart	419—422
Nachweisungen zu Lobatschefskijs Leben und Schriften	423—445
Verzeichniss der gedruckten Werke Lobatschefskijs nach der Zeitfolge ihres Erscheinens	446—449
Berichtigungen und Nachträge	450—456
Sachregister zur Uebersetzung und zu den Anmerkungen	457—463
Namenregister zur Uebersetzung und zu den Anmerkungen	464
Namenregister zur Lebensbeschreibung Lobatschefskijs und zu den Nachweisungen	465—468
Nachwort	469—476

Nachträgliches.

Zu S. 435f. schreibt mir Excellenz O. Struve unterm 11. Januar 1899 aus Karlsruhe, er könne aufs Bestimmteste versichern, dass jener Besuch bei Gauss im Spätsommer 1844 stattgefunden habe. Sowohl 1843 als 1844 habe er bei Schumacher in Altona gewohnt, aber im ersteren Jahre nur eine Vergnügungstour an den Rhein und nach Thüringen gemacht, insbesondere zu seinem Freunde Hansen in Gotha, ohne auf dieser Reise Göttingen zu berühren. Im Sommer 1844 habe er die grosse Chronometerexpedition zwischen Altona und Greenwich geleitet, habe England am 22. August verlassen, dann 14 Tage in Paris verbracht und sei über Bonn nach Göttingen gereist. Demgemäss sei er beiläufig am 10. September bei Gauss gewesen; bei der Angabe „Ende August 1844“ (S. 435, Z. 15) habe ihm wohl der, von der Jugend her geläufigere, alte Stil vorgeschwebt. Ende September 1844 in Petersburg wieder eingetroffen, habe er sich sogleich bemüht, Alles zu sammeln, was sich bei den dortigen Buchhändlern von Lobatschefskijs Schriften auftreiben liess, und habe das Gefundene mit einem der letzten regelmässig verkehrenden Dampfschiffe nach Deutschland gesendet.

S. 419, Z. 6, 5 v. u. lies: Lobatschefskij-Bolyaische.

S. 436, Z. 3—1 v. u. In den Göttingischen Gelehrten Anzeigen vom 15. December 1842 (S. 1986) findet man eine kurze Notiz über die erfolgte Wahl des neuen Korrespondenten.

Anmerkungen.

Im Folgenden wird von den nachstehenden Abkürzungen Gebrauch gemacht:

K. B. ist der Kasaner Bote (Kasánskij Wjéstnik). Dieser erschien in einzelnen Oktavheften. Im Allgemeinen bildeten die im Laufe von vier Monaten erschienenen Hefte einen Theil (tschastj). Die Theile waren fortlaufend nummerirt. Jedes Heft (kníshka) trug ausser der Jahreszahl und ausser seiner Nummer innerhalb des betreffenden Theils noch die Bezeichnung: für den Monat . . . oder: für die Monate . . . . In den Kopfüberschriften auf S. 2—66 der gegenwärtigen Uebersetzung sind der Kürze wegen statt der Monatsnamen die Nummern der Monate angegeben.

A. P., der Petrofskijsche Abdruck, ist ein fortlaufend paginirter Sonderabdruck, den Professor Petrófskij in Kasan von der Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe" besitzt.

K. G. S., die Kasaner gelehrten Schriften (Utschónyja sapíski Kasánskawa Universitéta) von Lobatschefskij im Jahre 1834 gegründet. Der erste Jahrgang 1834 besteht aus zwei Oktavheften, die folgenden aus je vier, die durchweg besonders paginirt sind. Später kommen auch einzelne Hefte in Quart vor.

G. A., die vollständige Sammlung der geometrischen Arbeiten Lobatschefskijs (Pólnoje sobrânije sotschinénij po geometríi N. J. Lobatschefskawa). Theil I (die Arbeiten in russischer Sprache) Kasan 1883, S. 1—550, Theil II (die Arbeiten in deutscher und französischer Sprache, mit einem Bilde Lobatschefskijs) Kasan 1886, S. 551—680.

U. A., die Abhandlung: Ueber die Anfangsgründe der Geometrie (O natschálach geometríi). K. B. 1829 und 1830, G. A. I, S. 1—67, hier S. 1—66.

N. A., die Abhandlung: Neue Anfangsgründe der Geometrie (Nówyja natschála geometríi). K. G. S. 1835—1838. G. A. I, S. 219—486, hier S. 67—236.

J. G. F., die Abhandlung: Géométrie imaginaire, Crelles Journal Bd. XVII, 1837, S. 295—320. G. A. II, S. 581—613.

J. G. R., die Abhandlung: Imaginäre Geometrie (Woobrashájemaja geometríja), Bearbeitung der vorhergehenden Abhandlung in russischer Sprache, K. G. S. 1835, I, S. 3—88, G. A. I, S. 71—120.

A. J. G., die Abhandlung: Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale (Primjenjénije woobrashájemoj geometríi k njekotórym integrálam). K. K. S. 1836, I, S. 3—166. G. A. I, S. 121—218.

G. U., das Schriftchen: Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840. In der Fincke'schen Buchhandlung, 61 Seiten Oktav. G. A. II, S. 553—578. Ein Faksimiledruck ist 1887 bei Mayer und Müller in Berlin erschienen.

P. G. R., die Abhandlung: Pangeometrie (Pangeometríja) in russischer Sprache. K. G. S. 1855, I, in Quart, S. 1—56, G. A. I, S. 489—550, erschienen 1856.

P. G. F., die Abhandlung: Pangéométrie ou précis de Géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles, eine französische Uebersetzung der vorigen. Sammlung gelehrter Abhandlungen zum fünfzigjährigen Jubiläum der Universität Kasan (Sbórnik utschónych statjéj) Bd. I, Kasan 1856, S. 279—340. G. A. II, S. 617—680.

P. Th., das Buch: Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, herausgegeben von Stäckel und Engel, Leipzig 1895.

Im Folgenden beziehen sich die ohne weitere Bemerkung angeführten Seitenzahlen auf die vorliegende Uebersetzung oder, sobald sie in Klammern eingeschlossen sind, auf die G. A. Etwaige Abweichungen der Uebersetzung von dem Texte der Originaldrucke werden im Folgenden immer angegeben, dagegen werden solche Stellen, an denen die Uebersetzung den in den G. A. geänderten Urtext wiederhergestellt hat, im Allgemeinen nicht angeführt.

In den Figuren sind parallele Gerade überall durch Pfeile kenntlich gemacht.

I. Zu der Abhandlung:

Ueber die Anfangsgründe der Geometrie.

S. 1, Z. 1 (1, Z. 1). Die Uebersetzung „Anfangsgründe" für „Natschala" rührt von Lobatschefskij selbst her, s. G. U. S. 4, G. A. II, S. 553; man könnte Natschala auch durch: Principien wiedergeben.

S. 1, Z. 4—1 v. u. (1, Z. 3—1 v. u.). Das Manuskript dieser Abhandlung ist bis jetzt noch nicht wiedergefunden und ist wahrscheinlich verloren, einige Stücke sind uns jedoch daraus erhalten und zwar allem Anscheine nach genau in der ursprünglichen Gestalt, man vgl. S. 21 Anm. und S. 214 Anm.

S. 2, Z. 8—5 v. u. (2, Z. 15—13 v. u.) Der Text des K. B. lautet: Вѣчность и одинаковость разъ сообщеннаго движенія, гдѣ скорость служитъ мѣрою одного и массы различныхъ тѣлъ u. s. w. In den G. A. ist das одного durch онаго ersetzt, und es wäre dann массы nicht als der Nominativus Pluralis, sondern als der Genetivus Singularis aufzufassen, der brachylogisch statt des Pluralis gesetzt wäre: „wo die Geschwindigkeit als Mass für jene (die Bewegung) und für die Massen verschiedener Körper dient". Der ursprüngliche Wortlaut erscheint mir grammatisch richtiger und mindestens ebenso verständlich.

S. 3, Z. 14, 10 v. u. (3, Z. 10, 13). Reihenschnitte: сѣченія поступательныя, eigentlich sich vorwärts bewegende oder auf einander folgende Schnitte; Wendeschnitte: сѣченія обращательныя.

S. 7, Z. 4 (6, Z. 8) K. B.: Перемѣняясь „die sich verändern", A. P. richtig: Пересѣкаясь.

S. 8, Z. 10 (7, Z. 6). Diese Bestimmung ist äusserst zweckmässig und verdient allgemeine Verbreitung. Sollte sie Lobatschefskij eigenthümlich sein?

S. 8, Z. 21—19 v. u. (7, Z. 14 f.). Alle Ausgaben haben irrthümlich: Проведенныхъ statt: -ными.

S. 9, Z. 6 (7, Z. 3 v. u.). Alle Ausgaben: „Dreiecks" statt: „Vielecks".

S. 9, Z. 12 (8, Z. 1). Im Texte schreiben wir Brüche stets in dieser Weise, eine Bezeichnung, die auch Lobatschefskij selbst zuweilen anwendet.

S. 9, Z. 17 (8, Z. 5). A. P. hat: Hier sind *m* und *t* nothwendig kleiner als sechs, sonst . . . .

S. 10, Z. 2 v. u. (8, Z. 2 v. u.). Die nur eine Seite umfassende Arbeit Grunerts hat den Titel: „Einfacher Beweis der von Cauchy und Euler gefundenen Sätze von Figurennetzen und Polyëdern."

S. 11 f. Im K. B. steht die Seitenzahl 240 zweimal nach einander.

S. 11, Z. 18f. (9, Z. 1 v. u.). Für diesen Winkel hat Lobatschefskij später die Bezeichnung eingeführt: „der zu der Linie (dem Lothe) a gehörige Parallelwinkel", und zwar findet sich diese Bezeichnung zuerst in der A. J. G., s. K. G. S. 1836, I, S. 5, G. A. I, S. 122. Dort, sowie auch schon vorher in der I. G. F. wie I. G. R., schreibt er für $F(a)$ einfach a'. In den N. A. dagegen (s. hier S. 167) wendet er das Zeichen $\Pi(a)$ an, an dem er später in den G. U. und in der P. G. festgehalten hat.

S. 14, Z. 2 (12, Z. 12). Lobatschefskij schreibt stets: $\sin A^2$, $\cos A^2$ und dementsprechend.

S. 14, Z. 15 v. u. (12, Z. 4 v. u.). Der K. B. hat $\frac{1}{2}\pi - B$ statt: $-B$, im A. P. steht das Richtige.

S. 15, Z. 1 v. u. (13, Z. 5 v. u.). Lobatschefskij setzt die Gleichungsnummer stets rechts von der Gleichung.

S. 16, Fig. 2. In K. B. fehlt a'.

S. 17, Z. 5 (14, Z. 15). $b' - a$ ist positiv, denn $F(b') < F(a)$, also $b' > a$ (nach § 8).

S. 17, Z. 7 (14, Z. 16). Der K. B. hat ON statt: NO.

S. 17, Z. 12—19 (14, Z. 19—13 v. u.). Nach § 8 ist ja:

$$F(c - a') = \pi - F(a' - c),$$

also folgt aus (4):

$$(4\text{a}) \qquad F(a' - c) + F(a' + c) = \pi - 2F(b') = 2F(\beta').$$

Denkt man sich jetzt ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse a' und dem anliegenden spitzen Winkel $F(c)$ (Fig. 1'), so gilt nach (3) für die $F(c)$ gegenüberliegende Kathete m die Gleichung:

$$2F(m) = F(a' - c) + F(a' + c),$$

mithin ist: $F(m) = F(\beta')$ und: $m = \beta'$. Ferner erhält man nach (4) für den der andern Kathete l gegenüberliegenden Winkel $F(l')$ die Gleichung:

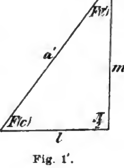


Fig. 1'.

$$\begin{aligned} 2F(l') &= F(a' - c) - F(a' + c) \\ &= \pi - F(c - a') - F(c + a') \\ &= \pi - 2F(a), \end{aligned}$$

demnach wird: $F(l') = F(\alpha)$ und: $l' = \alpha$. Zur Bestimmung der Kathete l dienen endlich die den Gleichungen (1) und (2) entsprechenden:

$$F(l) = F(a' + \alpha) + F(c)$$
$$F(l) = F(a' - \alpha) - F(c)$$

und überdies bestehen nach (5) wegen $l' = \alpha$ und $m = \beta'$ noch die Gleichungen:

$$F(\alpha - \beta') + F(c + l) = \tfrac{1}{2}\pi$$
$$F(\alpha + \beta') + F(c - l) = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Das sind die einzigen Gleichungen, die sich für l ergeben, aus ihnen lässt sich aber noch nicht schliessen, dass $l = b$ ist, was doch bei den Worten auf S. 17, Z. 6 v. u. (14, Z. 5 v. u.) vorausgesetzt wird. Dass $l = b$ ist,

folgt eigentlich erst, wenn man das in § 12 eingeführte sphärische Dreieck zu Hülfe nimmt. In der That hat Lobatschefskij in seinen späteren Veröffentlichungen niemals den in § 11 gemachten Schluss wiederholt, sondern stets das sphärische Dreieck des § 12 benutzt. Vgl. N. A. § 136, hier S. 210f., ferner G. U. Nr. 35 in den G. A. II, S. 570f., endlich P. G. R. und F., in den G. A. I, S. 494ff. II, S. 623f.

S. 17, Fig. 6. Hier ist auf die dem Winkel $F(c)$ anliegende Kathete der Buchstabe b zu setzen, der in den G. A. fehlt, aber im K. B. vorhanden ist, wenn auch sehr undeutlich.

S. 17f. (14f.), Gl. (6) bis (10). Vertauscht man abwechselnd einmal a mit b, a' mit b' und das andre Mal:

$$a,\ \alpha,\ c,\ \gamma,\ a',\ \alpha',\ b',\ \beta'$$

der Reihe nach mit:

$$\beta',\ b',\ a',\ \alpha',\ c,\ \gamma,\ \alpha,\ a,$$

so erhält man aus der Gleichung 6I nach einander: 6II, 6III, 6IV,

$$\begin{aligned}
2F(\beta') &= F(\alpha - \beta) + F(\alpha + \beta)\\
2F(\alpha') &= F(\beta - \alpha) + F(\beta + \alpha)\\
2F(\gamma) &= F(\beta - b') + F(\beta + b')\\
2F(\gamma) &= F(\alpha - a') + F(\alpha + a')\\
2F(\alpha') &= F(b' - c) + F(b' + c)\\
2F(\beta') &= F(a' - c) + F(a' + c)
\end{aligned}$$

und sodann wieder 6I. Ferner erhält man aus 7I der Reihe nach alle Gleichungen (7), (8) und überdies:

$$\begin{aligned}
2F(\alpha) &= F(\beta - b') - F(\beta + b')\\
2F(\beta) &= F(\alpha - a') - F(\alpha + a')\\
2F(\beta) &= F(b' - c) - F(b' + c)\\
2F(\alpha) &= F(a' - c) - F(a' + c),
\end{aligned}$$

worauf man wieder zu 7I zurückkommt: jedoch sind alle diese Gleichungen nur andre Schreibweisen der aus 6I folgenden. Endlich erhält man aus 9I die Gleichungen: 10I,

$$F(\alpha + \beta') + F(c - b) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

ferner 9II, 9III,

$$F(b' - \alpha') + F(\alpha + \gamma) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$F(\alpha - \gamma) + F(b' + \alpha') = \tfrac{1}{2}\pi$$

und endlich 10III und 10II.

In der letzten Gleichung (10) hat der K. B. $F(\alpha' + \beta')$ statt: $F(a' + \beta')$.

S. 18, Z. 15—2 v. u. (15, Z. 17—11 v. u.). Da die Ebenen $A'ABB'$ und $C'CBB'$ beide auf ABC senkrecht stehen, so ist der Winkel zwischen ihnen gleich $F(b')$; ferner ist AC senkrecht zu der Ebene $B'BCC'$, also diese senkrecht zu $C'CAA'$, demnach der Winkel zwischen den Ebenen ABC und $C'CAA'$ gleich $BCC' = F(a)$. Endlich ist $\angle BAC$ von vorn-

herein gleich $F(a')$, $\angle BAA'$ nach der Konstruktion gleich $F(c)$ und $\angle A'AC = F(b)$, weil CC' auf AC senkrecht steht.

S. 18, Z. 1 v. u.—19, Z. 4 v. o. (15, Z. 11—7 v. u.). Dieses neue rechtwinklige Dreieck erhält man (s. Fig. 2'), wenn man von A aus auf AB oder dessen Verlängerung $AD = a'$ abträgt und von D aus auf AA' das Loth DE fällt. Dann ist $\angle DAE = F(c)$, und es werde wie vorhin (vgl. Fig. 1') $EA = l$, $ED = m$, $\angle ADE = F(l')$ gesetzt. Zieht man jetzt in der Ebene DAC die Gerade DD' senkrecht zu DA, so ist DD' zu AC parallel, weil $\angle DAC = F(a')$ ist. Ferner steht DD' zugleich auf der Ebene DAE senkrecht; zieht man daher noch durch E die Gerade EE' zu DD' und also auch zu AC parallel, so erhält man drei Ebenen, die einander in den parallelen Geraden DD', EE' und AC schneiden und die an DD' und EE' die inneren Winkel $F(l')$ und $\frac{1}{2}\pi$ bilden, an AC nach § 8 den inneren Winkel $\frac{1}{2}\pi - F(l')$. Ferner bestimmen AA', AD und AC genau dasselbe sphärische Dreieck $A'BC$ (Fig. 8) wie früher und man findet für die Seiten dieses Dreiecks die Werthe:

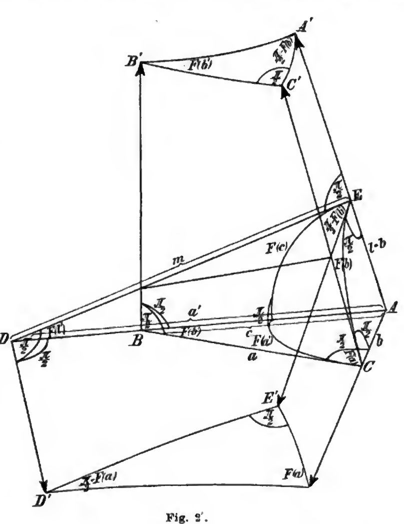


Fig. 2'.

$$A'C = \angle EAC = F(l),\ A'B = \angle A'AB = F(c),\ BC = \angle BAC = F(a')$$

und für die gegenüberliegenden Winkel diese:

$$A'BC = \tfrac{1}{2}\pi,\quad A'CB = \tfrac{1}{2}\pi - F(l'),\quad BA'C = \angle DEE' = F(m).$$

Vergleicht man diese Werthe mit den früher gefundenen (s. Fig. 8), so erhält man:

$$F(l) = F(b),\ \tfrac{1}{2}\pi - F(l') = F(a),\ F(m) = \tfrac{1}{2}\pi - F(b'),$$

woraus folgt: $l = b$, $l' = \alpha$, $m = \beta'$. Damit ist zugleich der vorhin (vgl. S. 239, Z. 3—1 v. u.) noch fehlende Nachweis, dass $l = b$ ist, erbracht.

Man kann übrigens auch rein formell zu Werke gehen. Jedem geradlinigen rechtwinkligen Dreiecke Δ mit den Seiten und Winkeln

$$\begin{array}{ccc} l & m & n \\ F(l') & F(m') & \tfrac{1}{2}\pi \end{array}$$

entspricht nach S. 18, Z. 15—2 v. u. ein sphärisches rechtwinkliges Dreieck $\varDelta'$ mit den Seiten und Winkeln:

$$\begin{array}{ccc} F(l') & F(n) & F(m) \\ \tfrac{1}{2}\pi - F(m') & F(l) & \tfrac{1}{2}\pi. \end{array}$$

Umgekehrt ist auch das geradlinige Dreieck $\varDelta$ durch das sphärische $\varDelta'$ bestimmt, denn aus den beiden Katheten $F(n)$ und $F(l')$ des sphärischen erhält man n und $F(l')$, also die Hypotenuse und den einen spitzen Winkel des geradlinigen, wodurch dieses vollständig bestimmt ist. Lässt man ferner jede der Linien n und l' alle Werthe von 0 bis ∞ durchlaufen, so durchläuft jede der Katheten $F(n)$ und $F(l')$ von $\varDelta'$ alle Werthe von $\tfrac{1}{2}\pi$ bis 0, folglich kann man das geradlinige Dreieck $\varDelta$ stets so wählen, dass $\varDelta'$ ein beliebig gewähltes sphärisches Dreieck wird, dessen Katheten beide kleiner als $\tfrac{1}{2}\pi$ sind. Insbesondere kann man auf zwei verschiedene Weisen erreichen, dass $\varDelta'$ mit dem sphärischen Dreiecke Fig. 8:

$$\begin{array}{ccc} F(a') & F(c) & F(b) \\ \tfrac{1}{2}\pi - F(b') & F(a) & \tfrac{1}{2}\pi \end{array}$$

zusammenfällt, indem man nämlich entweder:

$$l' = a', \quad n = c, \quad m = b, \quad m' = b', \quad l = a$$

setzt, oder:

$$l' = c, \quad n = a', \quad m = b, \quad l = \beta', \quad m' = \alpha.$$

Damit ist wieder gezeigt, dass zu jedem geradlinigen rechtwinkligen Dreiecke ABC, Fig. 1:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ F(a') & F(b') & \tfrac{1}{2}\pi \end{array}$$

ein andres geradliniges rechtwinkliges, Fig. 6:

$$\begin{array}{ccc} \beta' & b & a' \\ F(c) & F(\alpha) & \tfrac{1}{2}\pi \end{array}$$

gehört (vgl. P. G. R. und F. in den G. A. I, S. 494ff., II, S. 623f.).

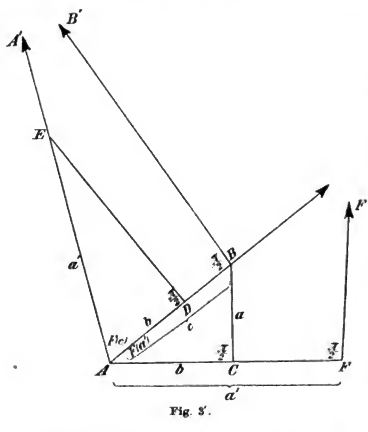


Fig. 3'.

Der Umstand, dass zu jedem rechtwinkligen Dreiecke ABC, Fig. 1 ein rechtwinkliges Dreieck von der Gestalt Fig. 6 gehört, giebt Gelegenheit zu einer ausserordentlich einfachen Konstruktion der Linie a', wenn der spitze Winkel $F(a')$ gegeben ist. Man zeichne nämlich (Fig. 3') irgend ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dem der spitze Winkel $F(a')$ angehört, errichte auf der Hypotenuse $AB = c$ in B die Senkrechte BB' und ziehe von A aus zu dieser die Parallele AA', so dass also $\angle BAA' = F(c)$ ist. Endlich mache man $AD = b$ und errichte in D auf der Hypotenuse die

Senkrechte DE, die AA' nothwendig in einem Punkte E schneiden muss. Dann ist: $AE = a'$, macht man also $AF = AE$ und errichtet man auf AF die Senkrechte FF', so ist FF' parallel zu AB.

Diese Konstruktion ist mit Zirkel und Lineal ausführbar, sobald man von einem gegebenen Punkte aus zu einer gegebenen Geraden die Parallele ziehen kann; wir werden später sehen (S. 256), dass auch diese Parallele mit Zirkel und Lineal gezeichnet werden kann.

S. 19, Z. 9, 12 (15, Z. 4, 2 v. u.). Im K. B. AC, BM statt: CA, DM.

S. 19, Z. 13—17 (16, Z. 1—3). Den Beweis hierfür findet man in § 137 der N. A., hier S. 214—217. Die Fig. 9 ist nur eine Vereinfachung der Fig. 133, S. 215.

Auf Z. 16 wäre es klarer zu sagen: „die Linie a' in der Gleichung $\angle BAC = F(a')$“, denn man hat sich $AC = AB = AA' = a'$ zu denken und dann C festzuhalten, während A mit wachsendem a' ins Unendliche rückt. Fällt man in Fig. 9 von B aus das Loth BE auf AA', so sind die Dreiecke BEA und $A'DA$ kongruent. Denkt man sich ferner in der Ebene BAC von B aus die Gerade BB' zu AB senkrecht gezogen, so wird BB' zu AC parallel, wegen $AB = a'$, $\angle BAC = F(a')$. Demnach steht das Dreieck BEA zu dem sphärischen Dreiecke $A'BC$ genau in derselben Beziehung wie in Fig. 2' das Dreieck AED zu dem dortigen sphärischen Dreiecke, das ja dem Dreiecke $A'BC$, Fig. 8 kongruent ist. Das heisst, die Dreiecke BEA und $A'DA$, Fig. 9 sind nichts andres als das Dreieck Fig. 6, S. 17.

S. 20, Z. 4f. (16, Z. 16f.). Man beachte, dass $F(a) = \frac{1}{2}\pi - F(\alpha)$ ist, also $\cos F(a) = \sin F(\alpha)$, $\sin F(a) = \cos F(\alpha)$. Der K. B. hat fehlerhaft:

$$\text{Lim.}\ \frac{F(a'+\alpha)}{F(a')} = \cot \tfrac{1}{2} F(\alpha'), \quad \text{Lim.}\ \frac{F(\alpha'-\alpha')}{F(a')} = \text{tang}\ \tfrac{1}{2} F(\alpha).$$

S. 20 (S. 16). Aus der Gleichung (12) ergeben sich unmittelbar die nachstehenden:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \sin F(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{\cosh x}, \\[2ex] \cos F(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \text{tgh}\, x, \\[2ex] \text{tg}\, F(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{1}{\sinh x}, \\[2ex] \cot F(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x, \end{cases}$$

wo $\sinh x$, $\cosh x$, ... die schon von Lambert mehrfach benutzten hyperbolischen Funktionen sind. Ferner erhält man zum Beispiel für $\sin F(x+y)$ den Ausdruck:

$$\frac{2}{e^{x+y} + e^{-x-y}} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})},$$

also wird:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \sin F(x+y) = \dfrac{\sin F(x) \,.\, \sin F(y)}{1 + \cos F(x) \,.\, \cos F(y)} \\[2mm] \cos F(x+y) = \dfrac{\cos F(x) + \cos F(y)}{1 + \cos F(x) \,.\, \cos F(y)} \\[2mm] \operatorname{tg} F(x+y) = \dfrac{\sin F(x) \,.\, \sin F(y)}{\cos F(x) + \cos F(y)} \,. \end{cases}$$

Da überdies nach § 8 $F(-y) = \pi - F(y)$ ist, so hat man noch:

$$\text{(III)} \qquad \sin F(-y) = \sin F(y), \quad \cos F(-y) = -\cos F(y),$$

mithin kann man auch $\sin F(x-y)$ und $\cos F(x-y)$ sofort hinschreiben.

Die Formeln (II) sind zuerst in der russischen Abhandlung A. J. G. aufgestellt, s. K. G. S. 1836, I, 6 und G. A. I, 122f., jedoch wird dort für $F(a)$ das Zeichen a' und für $F(a+b)$ das Zeichen $(a+b)'$ benutzt. Lobatschefskij bemerkt bei dieser Gelegenheit: „Es ist leicht zu sehen, dass hier, allerdings in andrer Gestalt, genau dieselben Funktionen auftreten, die Herr Gudermann als cyklisch-hyperbolische bezeichnet (Potential- oder cyklisch-hyperbolische Functionen, von Gudermann, Crelles Journal Bd. VI, [S. 1 ff.], 1830), die ich aber durch Einführung einer einzigen neuen Funktion unter dem Namen des Parallelwinkels ersetzt habe, indem ich mich dazu der in der Trigonometrie längst angenommenen Zeichen bediente. Auf diese Weise wird ein doppelter Zweck erreicht: ausser der Abkürzung der Bezeichnung ist mit einer analytischen Funktion eine geometrische Vorstellung verbunden."

Dass diese Einführung des Parallelwinkels grosse Vorzüge hat, ist unbestreitbar, denn ausser der geometrischen Anschaulichkeit hat man noch den Vortheil, dass man Längen und Winkel durch Grössen derselben Art ausdrücken kann, indem man nämlich entweder in allen Gleichungen statt jeder Länge a den zugehörigen Parallelwinkel $a' = F(a)$ einführt oder statt jedes Winkels A das Loth α, das der Gleichung $F(\alpha) = A$ genügt, also das Loth, dessen Parallelwinkel A ist. Namentlich im ersten Falle werden alle Gleichungen von besonderer Einfachheit, da sie dann, wie die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie, nur die gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen von Winkeln enthalten. Lobatschefskij hat sich jedoch diesen Vortheil nur in der I. G. F. und R. und in der A. I. G. zu Nutze gemacht, während er in seinen übrigen Abhandlungen fast immer Längen und Winkel unvermittelt neben einander in den Gleichungen schreibt. Die Gleichungen bekommen dadurch ein etwas ungeschicktes Aussehen, und überdies wird die Gleichberechtigung der Längen und Winkel verhüllt.

Den Vorzügen, die die Einführung des Parallelwinkels hat, stehen aber auch gewisse Nachtheile gegenüber. Vor allen Dingen kann nämlich die Funktion $F(x)$ nur für reelle Werthe von x als eindeutige Funktion von x definirt werden und wird für komplexe Werthe von x unendlich vieldeutig, während die hyperbolischen Funktionen $\sin F(x)$, $\cos F(x)$, $\operatorname{tg} F(x)$ stets eindeutig bleiben. Dazu kommt noch, dass bei Anwendung der Funktionszeichen $\sinh x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$ die Analogie zwischen den Formeln der sphärischen Geometrie und denen der Lobatschefskijschen Geometrie unmittelbar zu Tage liegt, während sie bei der Anwendung des Parallelwinkels verborgen bleibt.

Sehr merkwürdig ist es, dass Lobatschefskij nirgends ausdrücklich von der zu $F(x)$ oder $\Pi(x)$ inversen Funktion spricht, obwohl es doch offenbar wünschenswerth ist, auch für diese Funktion eine Benennung und ein Zeichen zu haben. Ohne einen Vorschlag in dieser Richtung zu machen, wollen wir nur erwähnen, dass Max Simon für die Auflösung der Gleichung: $\varphi = \Pi(x)$ nach x die Bezeichnung $x = D(\varphi)$ eingeführt hat und dass er x die zu dem Winkel φ gehörige „Paralleldistanz" nennt. Es versteht sich von selbst, dass diese Funktion $D(\varphi)$ nur für solche reelle Werthe von φ eindeutig definirt ist, die der Bedingung $0 \leq \varphi \leq \pi$ genügen.

Von grossem Interesse ist die von Stäckel bemerkte Thatsache, dass schon Lambert bei der Betrachtung der hyperbolischen Funktionen von x einen Hülfswinkel eingeführt hat, der in der Lobatschefskij schen Bezeichnung nichts andres ist als der Winkel $\frac{1}{2}\pi - F(x)$. Man findet die betreffenden Entwickelungen in den „Observations trigonométriques", Mémoires de Berlin, Année 1768, Berlin 1770, S. 327—354, vgl. auch Lamberts „Zusätze zu den Logarithmischen und Trigonometrischen Tafeln", Berlin 1770, S. 182. In der von Lambert herrührenden Figur 4′ ist QqE eine gleichseitige Hyperbel mit der Asymptote CA und der Scheiteltangente QA, QSD ist ein Kreisbogen mit dem Halbmesser $CQ = 1$. Ferner sind $Cp = x$ und $pq = y$ die rechtwinkligen Koordinaten von q, also: $x^2 - y^2 = 1$. Endlich ist $QP = pq = y$, also: $CP = Cp = x$, und wenn man $\angle QCq = \varphi$, $\angle QCP = \omega$ setzt, so wird:

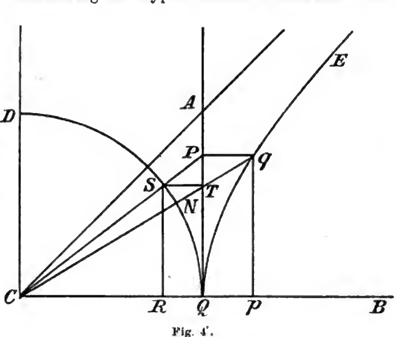


Fig. 4′.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \sin\omega.$$

Wie nun $\frac{1}{2}\varphi$ der Inhalt der Kreissektors $QNCQ$ ist, so bezeichnet Lambert den Inhalt des Hyperbelsektors $QqCQ$ mit $\frac{1}{2}u$. Setzt man dann $Cq = r$, so wird: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und mithin:

$$r^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}\,\frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi},$$

$$\tfrac{1}{2}\,du = \tfrac{1}{2}\,r^2\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\,\frac{d\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi},$$

das heisst:

$$u = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi}\right)$$

oder:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \operatorname{tgh} u.$$

Nach **Lobatschefskij** ist aber: $\operatorname{tgh} u = \cos F(u)$, also ist der **Lambert**sche Hülfswinkel: $\omega = \frac{1}{2}\pi - F(x)$.

S. 20, Z. 18 v. u. (17, Z. 4). Für „Gleichung (11)" hätte gesetzt werden sollen: „Gleichung (12)".

S. 20, Z. 13, 11 v. u. (17, Z. 8, 10). Der K. B. hat: tang $F(a)$ statt: tang $F(a')$ und sin $F(a')$ statt: cos $F(a')$.

S. 20, Z. 18—10 v. u. (17, Z. 4—11). Aus der ersten der Gleichungen (7) folgt:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} F(b') &= \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}F(c-a') - \operatorname{tg}\frac{1}{2}F(c+a')}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}F(c-a')\,.\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}F(c+a')} \\ &= \frac{e^{a'-c} - e^{-a'-c}}{1+e^{-2c}} \\ &= \frac{\sin F(c)}{\operatorname{tg} F(a')},\end{aligned}$$

also die Gleichung 13 IV. Behandelt man die übrigen Gleichungen (6), (7) und (8) ebenso, so erhält man ähnliche Gleichungen, jedoch erhält man aus (6) keine Gleichung, die nicht auch aus (7) und (8) folgt.

Statt übrigens jede einzelne der Gleichungen (6), (7), (8) auf die angegebene Weise zu behandeln, kann man auch auf 13 IV die beiden Operationen ausführen, durch die aus den ersten der Gleichungen (6) und (7) alle übrigen (6), (7), (8) entstanden sind (vgl. S. 240, Z. 10 ff.). Man findet auf diese Weise den folgenden, in sich abgeschlossenen Kreis von Gleichungen:

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases}\sin F(c) = \operatorname{tg} F(a')\,.\,\operatorname{tg} F(b') \\ \operatorname{tg} F(c) = \operatorname{tg} F(a)\,.\,\sin F(a') \\ \operatorname{tg} F(c) = \operatorname{tg} F(b)\,.\,\sin F(b') \\ \operatorname{tg} F(a') = \cos F(a)\,.\,\operatorname{tg} F(b) \\ \operatorname{tg} F(b') = \cos F(b)\,.\,\operatorname{tg} F(a),\end{cases}$$

aus dem man durch die beiden genannten Operationen nicht herauskommt. In diesem Kreise sind die Gleichungen 13 II, IV, V enthalten und die daraus durch Vertauschung der Katheten entstehenden. Die übrigen drei der Gleichungen (13) findet man aus (IV) folgendermassen:

Aus IV 1, 2 und 5 ergiebt sich:

$$\cos F(c) = \frac{\operatorname{tg} F(b')}{\operatorname{tg} F(a) \cos F(a')} = \frac{\cos F(b)}{\cos F(a')},$$

also 13 III. Nunmehr wird vermöge IV 2 und 4:

$$\sin F(c) = \operatorname{tg} F(a) \operatorname{tg} F(a') \cos F(b) = \sin F(a) \sin F(b),$$

was mit 13 I übereinstimmt, endlich bekommt man aus IV 2, 3 und 4:

$$\sin F(b') = \operatorname{tg} F(a)\,.\,\sin F(a')\,.\,\cot F(b) = \sin F(a)\,.\,\cos F(a'),$$

also 13 VI.

Aus den zwei leicht zu merkenden Gleichungen:

$$\sin F(c) = \operatorname{tg} F(a') \,.\, \operatorname{tg} F(b')$$
$$\sin F(c) = \sin F(a) \,.\, \sin F(b)$$

kann man übrigens durch die vorhin erwähnten beiden Operationen alle zehn Gleichungen für das rechtwinklige geradlinige Dreieck erhalten (vgl. S. 223). Von diesen beiden Operationen ist die eine ganz leicht zu behalten, da sie auf die gleichzeitige Vertauschung der Katheten und der spitzen Winkel des Dreiecks hinauskommt. Bei der andern gehen:

$$F(b) \quad F(a') \quad F(c) \quad F(b') \quad F(a)$$

über in:

$$F(b) \quad F(c) \quad F(a') \quad \tfrac{1}{2}\pi - F(a) \quad \tfrac{1}{2}\pi - F(b'),$$

und auch das kann man sich leicht merken, wenn man beachtet, dass die der festen Kathete b anliegenden Stücke $F(a')$ und $F(c)$ einfach vertauscht werden, während jedes der beiden von b durch den rechten Winkel getrennten Stücke $F(b')$ und $F(a)$ in das Komplement $\frac{1}{2}\pi - F(a)$ und $\frac{1}{2}\pi - F(b')$ des andern übergeht.

Viel weniger übersichtlich wird die Sache, wenn man für die Winkel $F(a')$ und $F(b')$ schreibt: A und B und wenn man statt der Winkel $F(a)$, $F(b)$, $F(c)$ die Seiten a, b, c selbst benutzt. Dabei geht eben der schon auf S. 244 erwähnte Vorzug verloren, den die Einführung des Parallelwinkels mit sich bringt, der Vorzug nämlich, dass alle Stücke des rechtwinkligen Dreiecks durch Grössen derselben Art, also entweder durch lauter Längen oder durch lauter Winkel ausdrückbar sind.

S. 21, Z. 1—7 (17, Z. 17—11 v. u.). Da nach § 12 zu dem geradlinigen rechtwinkligen Dreiecke mit den Seiten a, b, c und den Winkeln: $F(a')$, $F(b')$, $\frac{1}{2}\pi$ ein sphärisches mit den Seiten: $F(c)$, $F(a')$, $F(b)$ und den gegenüberliegenden Winkeln: $F(a)$, $\frac{1}{2}\pi - F(b')$, $\frac{1}{2}\pi$ gehört, so braucht man nur in den Gleichungen (13) der Reihe nach:

$$F(c) \quad F(a') \quad F(b) \quad F(a) \quad \tfrac{1}{2}\pi - F(b')$$

durch:

$$a \quad b \quad c \quad A \quad B$$

zu ersetzen, um die Gleichungen (15) für das rechtwinklige sphärische Dreieck zu erhalten. Allerdings ist dabei zunächst vorausgesetzt, dass a, b, c, A, B sämtlich $< \frac{1}{2}\pi$ sind. Den Beweis für die Allgemeingültigkeit der Gleichungen (15) und die Ableitung der Gleichungen (16) findet man in § 144 und 145 der N. A., hier S. 227—231.

In der vorletzten der Gleichungen (15) hat der K. B. tang b statt: sin b.

S. 21, Z. 16—24 (17, Z. 2 v. u.—18, Z. 6). Die Ableitung der Gleichungen (17) findet man in § 142 der N. A., hier S. 223—226.

S. 21, Z. 8—5 v. u. (18, Z. 7—9). Man denke sich nur die Ausdrücke (I), S. 243 in Potenzreihen entwickelt. Der K. B. hat unrichtig:

$$\cos F(a) = a(1 - a^2).$$

S. 21, Z. 3—1 v. u. (18, Z. 2, 1 v. u.). Es ist kaum anzunehmen, dass sich die Worte: „Alles, was nach diesen folgt“ blos auf das im K. B. vom November-December 1829 noch Folgende beziehen, denn das wäre nur der § 14; sie werden sich vielmehr auf den ganzen Rest der Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie“ beziehen.

S. 22, Z. 17—21 (18, Z. 7—4 v. u.). Man beachte, dass nur der Winkel $\frac{1}{2}\pi - 2p$ unmittelbar gemessen werden kann und dass sich also der Winkel $2p$, sobald die Euklidische Geometrie nicht gilt, nur auf die im Texte angegebene Weise definiren lässt.

S. 22, Z. 12—10 v. u. (19, Z. 1—3). Es ist ja nach (12):

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F(a) = e^{-a} > \operatorname{tg} (\tfrac{1}{4}\pi - p),$$

also:

$$e^{-a} > \frac{1 - \operatorname{tg} p}{1 + \operatorname{tg} p},$$

woraus die Ungleichheit für a selbst sofort folgt. Ferner ist:

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{tg} 2p = \frac{\operatorname{tg} p}{1 - \operatorname{tg}^2 p} = \operatorname{tg} p + \operatorname{tg}^3 p + \cdots.$$

S. 22, Z. 3—1 v. u. ff. (19, Z. 10ff.). Die betreffende Abhandlung steht in der Connaissance des tems pour l'an 1831, Paris 1828, S. 120—148 und hat den Titel: „Mémoire sur la détermination de la parallaxe et du mouvement propre en déclinaison des étoiles au moyen d'une nouvelle méthode d'occultations artificielles, par M. le comte d'Assas-Montdardier ancien capitaine de vaisseau, chevalier de Saint Louis.“ Auf S. 149—151 folgt ein ganz kurzer Rapport par Delambre. Nach dem Urteile Harzers in Kiel ist das darin beschriebene Verfahren durchaus unbrauchbar. Das zeigen übrigens schon die im Texte angegebenen Parallaxen, die alle viel zu gross sind, während die wirklichen Parallaxen der betreffenden Sterne kaum messbar sind. Die Bezeichnung „29 Eridani“ bezieht sich auf Flamsteeds berühmtes Verzeichniss der Fixsterne, Historia coelestis, pars I, London 1712. Der Name „Keid“ findet sich aber dort nicht und ist überhaupt ganz ungebräuchlich.

S. 23, Z. 2—5 (19, Z. 12—16). Zur Bequemlichkeit des Lesers geben wir hier ein Täfelchen für die Grösse der Bogensekunden ausgedrückt in Theilen des Halbmessers:

1″	0,00000 48481 36811 09536
2″	0,00000 96962 73622 19072
3″	0,00001 45444 10433 28608
4″	0,00001 93925 47244 38144
5″	0,00002 42406 84055 47680
6″	0,00002 90888 20866 57216
7″	0,00003 39369 57677 66752
8″	0,00003 87850 94488 76288
9″	0,00004 36332 31299 85824
10″	0,00004 84813 68110 95360

Im K. B. steht für den Sirius:

$$a < 0{,}00000\,602,$$

während die Rechnung ergiebt: 60117.

S. 23, Z. 13—26 (19, Z. 14—4 v. u.). Vertauscht man in 17 IV A mit C, a mit c und setzt man dann die Werthe des Textes ein, so kommt:

$$\cos(2p - 2\omega) = \frac{\cos 2p}{\sin F(a)},$$

andrerseits ist nach S. 244 (II):

$$\sin F(a) = \frac{1 - \cos^2 F(\tfrac{1}{2}a)}{1 + \cos^2 F(\tfrac{1}{2}a)},$$

also wird:

$$\cos F(\tfrac{1}{2}a) = \sqrt{\frac{\cos(2p - 2\omega) - \cos 2p}{\cos(2p - 2\omega) + \cos 2p}} = \sqrt{\operatorname{tg}\omega \,.\, \operatorname{tg}(2p - \omega)}.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\cos(2p - 2\omega) = \cos 2p\,(1 + 2\cot^2 F(\tfrac{1}{2}a)),$$

also:

$$\sin^2(p - \omega) = \sin^2 p - \cos 2p \,.\, \cot^2 F(\tfrac{1}{2}a).$$

Diese Gleichung gilt für je zwei zusammengehörige Werthe von p und ω, also auch wenn man p durch die kleinere Parallaxe p' und ω durch das zu p' gehörige ω' ersetzt. Da nun die rechte Seite der Gleichung stets > 0 ist, so ergiebt sich sofort die Ungleichheit des Textes

$$\cot^2 F(\tfrac{1}{2}a) < \frac{\sin^2 p'}{\cos 2p'}$$

und nunmehr wird:

$$\sin^2(p - \omega) > \sin^2 p - \sin^2 p' \frac{\cos 2p}{\cos 2p'},$$

wenn man also:

$$\sin x = \frac{\sin p'}{\sin p}\sqrt{\frac{\cos 2p}{\cos 2p'}}$$

setzt:

$$\sin(p - \omega) > \sin p \,.\, \cos x,$$

oder wegen der Kleinheit von p und ω

$$p - \omega > p\cos x, \quad \omega < 2p\sin^2\tfrac{1}{2}x.$$

Für $p = 1''$, $p' = 0'',62$ findet man mit völlig genügender Genauigkeit: $\sin x = p' : p = 0{,}62$, also:

$$\log\sin x = 9{,}79239 - 10$$
$$x = 38^0\,19', \quad \tfrac{1}{2}x = 19^0\,9',5$$
$$\log\sin\tfrac{1}{2}x = 9{,}51611 - 10$$
$$\log(2p\sin^2\tfrac{1}{2}x) = 9{,}33325 - 10$$
$$\omega < 0'',2154.$$

S. 23, Z. 8 v. u. (19, Z. 2 v. u.) steht im K. B. irrthümlich „bis zum ersten dieser Sterne", während doch ω zu p, also zu dem zweiten der Sterne gehört.

S. 23, Z. 5 v. u.—24, Z. 6 (20, Z. 1—8). Für die spitzen Winkel $F(a')$, $F(b')$ eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a, b gelten die Gleichungen (8) auf S. 18; da nun $F(\alpha - \beta) + F(\beta - \alpha) = \pi$ ist, so ergiebt sich:

$$F(a') + F(b') = \tfrac{1}{2}\pi - F(\alpha + \beta),$$

wenn also $\pi - 2\omega$ die Winkelsumme des Dreiecks ist, so hat man: $2\omega = F(\alpha + \beta)$, also nach (12):

$$\operatorname{tg}\omega = e^{-\alpha-\beta} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}F(\alpha) \,.\, \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}F(\beta)$$

oder wegen: $F(\alpha) = \frac{1}{2}\pi - F(a)$, $F(\beta) = \frac{1}{2}\pi - F(b)$:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{1-e^{-a}}{1+e^{-a}} \cdot \frac{1-e^{-b}}{1+e^{-b}} = \cos F(\tfrac{1}{2}a) \,.\, \cos F(\tfrac{1}{2}b).$$

Für $b = a$ insbesondere ergiebt sich:

$$\operatorname{tg}\omega = \cos^2 F(\tfrac{1}{2}a) = \left(\frac{e^a-1}{e^a+1}\right)^2,$$

nun aber ist nach S. 22, Z. 11 v. u. (19, Z. 2):

$$e^a < \frac{1+\operatorname{tg}p}{1-\operatorname{tg}p},$$

folglich:

$$\frac{e^a-1}{e^a+1} < \operatorname{tg}p$$

und somit:

$$\operatorname{tg}\omega < \operatorname{tg}^2 p.$$

Setzt man $p = 0'',62$ und bezeichnet man diesen Winkel, ausgedrückt in Theilen des Halbmessers mit $\bar{p}$, so wird

$$\bar{p} = 0{,}00000\,30058,$$

und für den Winkel 2ω, ausgedrückt in Bogensekunden, erhält man mit vollkommen genügender Genauigkeit

$$2\omega < 2p \,.\, \bar{p} = 0'',00000\,3727.$$

Im K. B. steht hier merkwürdiger Weise:

$$2\omega < 0'',000372,$$

also ein Werth, der hundertmal zu gross ist, und auch in seinen spätern Schriften wiederholt Lobatschefskij diese unrichtige Angabe. Vgl. I. G. R., K. G. S. 1835, I, S. 19 (G. A. I, S. 79), I. G. F., Crelle, XVII, S. 303 (G. A. II, S. 590), G. U. S. 60 (G. A. II, S. 578).

In seinen nach 1830 veröffentlichten Arbeiten kommt Lobatschefskij nur noch ein einziges Mal etwas eingehender auf die experimentelle Seite der Frage nach den Grundlagen der Geometrie zurück, nämlich am Schlusse der P. G. R. und F., in den G. A. I, S. 548—550, II, S. 678—680. Die betreffende Stelle lautet in deutscher Uebersetzung:

„Die Pangeometrie, die auf sichere Principien gegründet und die im Vorhergehenden entwickelt worden ist, giebt, wie man gesehen hat, Methoden an, um die Werthe der verschiedenen geometrischen Grössen zu berechnen, und sie beweist gleichzeitig, dass die Annahme, die Summe der drei Winkel jedes geradlinigen Dreiecks sei konstant, eine Annahme, die in der gewöhnlichen Geometrie explicite oder implicite gebräuchlich ist, keine nothwendige Folge unsrer Begriffe vom Raume ist. Nur die Erfahrung kann die Richtigkeit dieser Annahme bestätigen, zum Beispiele durch die

wirkliche Messung der drei Winkel eines geradlinigen Dreiecks, eine Messung, die auf verschiedene Arten ausgeführt werden kann. Man kann entweder die drei Winkel eines geradlinigen Dreiecks messen, das man auf einer künstlichen Ebene konstruirt hat, oder die drei Winkel eines geradlinigen Dreiecks im Raume. Im zweiten Falle wird man solche Dreiecke vorziehen müssen, deren Seiten sehr gross sind, da nach der Pangeometrie der Unterschied zwischen zwei rechten Winkeln und der Summe der drei Winkel eines geradlinigen Dreiecks um so grösser ist, je grösser die Seiten sind.

„Es sei r der Halbmesser eines Kreises und A ein Centriwinkel, dessen Schenkel einen Bogen einschliessen, zu dem eine Sehne von der Länge r gehört. Das vom Kreismittelpunkte auf diese Sehne gefällte Loth, dessen Fusspunkt die Sehne in zwei gleiche Theile zerlegt, nennen wir p. Betrachten wir eines der rechtwinkligen Dreiecke, die von diesem Lothe, von den Halbmessern auf den Schenkeln des Winkels A und von der Sehne gebildet werden, also ein Dreieck, dessen Hypotenuse r ist und dessen zu einander senkrechte Seiten $\frac{1}{2}r$ und p sind.

„Nach der allgemeinen Gleichung (13) [hier S. 21, Gl. 17 I] wird man in diesem Dreiecke haben:

$$\sin \tfrac{1}{2} A \,.\, \operatorname{tang} \Pi(\tfrac{1}{2} r) = \operatorname{tang} \Pi(r),$$

eine Gleichung, die in Verbindung mit der Identität:

$$\operatorname{tang} \Pi(r) = \frac{\sin^2 \Pi(\frac{1}{2} r)}{2 \cos \Pi(\frac{1}{2} r)}$$

ergiebt:

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sin \Pi(\tfrac{1}{2} r).$$

In der gewöhnlichen Geometrie hat man:

$$A = \tfrac{1}{3} \pi.$$

Nehmen wir an, dass die wirkliche Messung ergiebt:

$$A = \frac{2\pi}{6 + K},$$

wo K eine positive Zahl ist.

„Man wird also haben müssen:

$$\sin \left(\frac{\pi}{6 + K}\right) = \tfrac{1}{2} \sin \Pi(\tfrac{1}{2} r).$$

„Sind r und K gegeben, so kann man aus dieser Gleichung den Werth von $\Pi(\frac{1}{2} r)$ entnehmen und mit dessen Hülfe den Parallelwinkel $\Pi(x)$ für jede Linie x finden.

„Die Abstände zwischen den Himmelskörpern liefern uns ein Mittel, die Winkel von Dreiecken zu beobachten, deren Seiten sehr gross sind. Es sei α die geocentrische Breite eines Fixsterns zu einer bestimmten Zeit und β eine andre geocentrische Breite desselben Sterns, eine Breite, die der Zeit entspricht, wo sich die Erde wieder in der zur Ekliptik senkrechten Ebene befindet, die durch ihren ersten Ort gelegt ist, nämlich durch den Ort, wo die Breite des Sternes α war; $2a$ sei der Abstand dieser beiden Erdörter und δ der Winkel, unter dem der Abstand $2a$ von dem Sterne aus erscheint.

„Wenn die Winkel α, β, δ der Bedingung:

$$\alpha = \beta + \delta$$

nicht genügen, so wird das ein Zeichen dafür sein, dass die Summe der drei Winkel dieses Dreiecks von zwei Rechten abweicht.

„Man kann den Stern so wählen, dass $\delta = 0$ ist, und kann immer annehmen, dass es eine solche Linie x giebt, dass

$$\Pi(x) = \alpha.$$

„Ist $\delta = 0$, so kann man die Geraden, die von den beiden Erdörtern nach dem Sterne gezogen sind, als parallel betrachten, und wird folglich haben müssen:

$$\beta = \Pi(x + 2a),$$

woraus nach dem früher Bewiesenen folgt:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = e^{-x}, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta = e^{-x-2a}.$$

Jedes Mal, wenn die Beobachtungen bei einem Sterne, für den der mit δ bezeichnete Winkel null ist, zwei verschiedene Winkel α und β ergeben, werden die beiden letzten Gleichungen x und a bestimmen, ausgedrückt durch die Linie, die in der Pangeometrie zur Längeneinheit genommen ist. Hat man auf diese Weise die Linie x gefunden, die einem Parallelwinkel $\Pi(x)$ entspricht, so wird man den Parallelwinkel $\Pi(y)$ für jede gegebene Linie y berechnen können."

Im Grossen und Ganzen sind diese Betrachtungen nicht so befriedigend, wie die im K. B. Die Worte: „Man kann den Stern so wählen, dass $\delta = 0$ ist", geben sogar zu Bedenken Anlass.

S. 24, Z. 13—18 (20, Z. 14—17). Offenbar ist eine Stelle in der Laplaceschen Exposition du système du monde gemeint (Oeuvres de Laplace, tome VI). Dort heisst es im 6. Kapitel des 5. Buches: „Il paraît que, loin d'être disséminées à des distances à peu près égales, les étoiles sont rassemblées en divers groupes, dont quelques-uns renferment des milliards de ces astres. Notre soleil et les plus brillantes étoiles font probablement partie d'un de ces groupes qui, vu du point où nous sommes, semble entourer le ciel et forme la voie lactée. ... Il est donc probable que parmi les nébouleuses, plusieurs sont des groupes d'un très-grand nombre d'étoiles qui, vu de leur intérieur, paraîtraient semblables à la voie lactée."

S. 24, Z. 17—12 v. u. (20, Z. 14—10 v. u.). Im K. B. ist das Wort Wahrheit gesperrt. Das Wörtchen „nicht" auf Z. 13 v. u. fehlt im K. B. und im A. P., es wird aber durch den Sinn unbedingt erfordert. Vorher hat ja Lobatschefskij gesagt, dass die Natur selbst innerhalb der uns sichtbaren Welt Abstände zeigt, gegen die sogar die Abstände der Erde von Fixsternen verschwinden, und es ist undenkbar, dass er daran die Bemerkung geknüpft haben sollte, man könne ferner unmöglich behaupten, dass sich die Euklidische Geometrie noch innerhalb der Gränzen der uns sichtbaren Welt als unrichtig herausstellen könne. Gerade diese Behauptung hatte ja vor Lobatschefskij überhaupt noch niemand öffentlich aufgestellt. Dazu kommt, dass Lobatschefskij nachher fortfährt: „Andrerseits sind wir ausser Stande zu begreifen, ...;" das ist nur ver-

ständlich, wenn er es im Vorhergehenden als möglich hingestellt hat, dass seine nichteuklidische Geometrie in der Natur verwirklicht sein könne.

S. 25, Z. 8 (21, Z. 6). Der K. B. hat x statt y.

S. 25, Z. 12—17 (21, Z. 9—13). Zur Erläuterung werden die beiden hier stehenden Figuren:

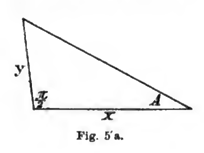


Fig. 5′a.

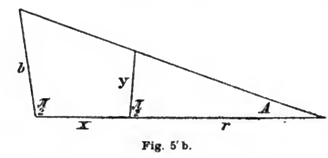


Fig. 5′b.

nützlich sein. Für $\operatorname{tg} F(r+x)$ denke man sich den Werth S. 244, (II) eingesetzt. Die Seitenzahl [*257* gehört übrigens an die Zeile 12 v. o., nicht an die Zeile 10.

S. 25, Z. 7—4 v. u. (21, Z. 13—10 v. u.). Die Linie a kann man geometrisch konstruiren. Man konstruire nämlich nach Anleitung von S. 242f. eine Linie λ derart, dass: $F(\lambda) = \frac{1}{2}\pi - F(l)$ wird. Da sich nun die Gleichung (20) in der Form:

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\pi - A) = \cos F(a) \,.\, \operatorname{tg} F(\lambda)$$

schreiben lässt, so erkennt man aus 14 V leicht, dass in dem rechtwinkligen Dreiecke, das a und λ zu Katheten hat, der Kathete a der Winkel $\frac{1}{2}\pi - A$ gegenüberliegt, und da

$$F(l) < A < \tfrac{1}{2}\pi$$

ist und also:

$$\tfrac{1}{2}\pi - A < F(\lambda) < \tfrac{1}{2}\pi,$$

so giebt es stets ein rechtwinkliges Dreieck, in dem λ die eine Kathete und $\frac{1}{2}\pi - A$ der anliegende Winkel ist und also a die andre Kathete. Damit ist die Möglichkeit der Konstruktion von a bewiesen. In der Fig. 6′ ist $F(l) > \frac{1}{4}\pi$ angenommen, so dass $F(\lambda) < F(l)$ und also $\lambda > l$ wird; es ist zugleich das gemeinsame Loth b mit eingezeichnet, das die beiden von den Endpunkten von l ausgehenden Geraden in der Entfernung a besitzen; vgl. S. 26, Z. 4—19.

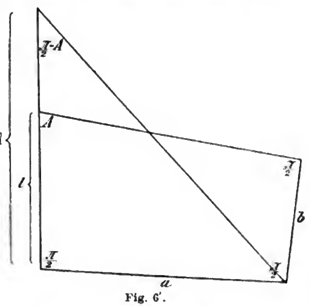


Fig. 6′.

S. 25, Z. 3 v. u.—26, Z. 24 (21, Z. 9 v. u.—22, Z. 13). Zur Bequemlichkeit des Lesers geben wir hier noch eine Figur bei (Fig. 7′). Dass $L' = \frac{1}{2}\pi - L$ wird, beruht darauf, dass sich ergiebt:

$$\operatorname{tg} L' = \frac{\sin F(c) \,.\, \cos F(a)}{\sin^2 F(a) \,.\, \sin F(l) \,.\, \cos F(l)} = \frac{\cot F(a)}{\cos F(l)} = \cot L.$$

Da übrigens das von l, a, b, t gebildete Viereck (Fig. 10) drei rechte Winkel enthält, so müssen die zwischen l, a, b, t gefundenen Gleichungen (20), (21), (22) richtig bleiben, wenn man l mit t und gleichzeitig a mit b vertauscht. Es bestehen also noch die drei Gleichungen:

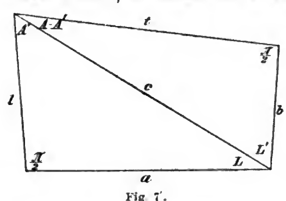


Fig. 7'.

(20') $\operatorname{tg} F(t) = \operatorname{tg} A \,.\, \cos F(b)$,

(21') $\cos F(a) = \sin F(b) \,.\, \cos F(t)$,

(22') $\operatorname{tg} F(l) = \sin F(t) \,.\, \operatorname{tg} F(b)$.

S. 25, Z. 7 v. u.—26, Z. 24 (21, Z. 13 v. u.—22, Z. 13). Die ganze Entwickelung hat etwas künstliches, da die Linie a so unvorbereitet eingeführt wird; es ist daher erwünscht, eine Ableitung der Gleichungen (20), (21), (22) zu kennen, die unmittelbar von dem Umstande ausgeht, dass l, a, b, t ein Viereck bilden, in dem der Winkel zwischen l und t gleich A ist, während die drei übrigen Winkel Rechte sind. Eine solche Ableitung hat Lobatschefskij selbst in der Pangeometrie gegeben (P. G. R., K. G. S. 1855, I, S. 25ff., G. A. I, S. 517 f. und P. G. F., Sbornik 1856, S. 306 f., G. A. II, S. 645 f.). Wir theilen hier diese Ableitung etwas abgekürzt mit, schreiben aber dabei $F(x)$ für $\Pi(x)$.

In dem Vierecke Fig. 8', das drei rechte Winkel hat, ist nach (14):

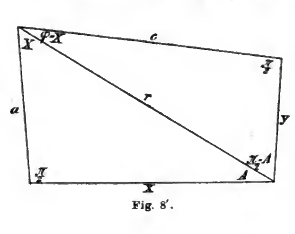


Fig. 8'.

$$(G)\begin{cases} \sin F(r) = \sin F(a) . \sin F(x) \\ \sin A \,.\, \operatorname{tg} F(a) = \sin X \,.\, \operatorname{tg} F(x) \\ \cos F(r) . \cos A = \cos F(x) \\ \cos F(r) . \cos X = \cos F(a) \end{cases}$$

und

$$(H)\begin{cases} \sin F(y) \,.\, \sin F(c) = \sin F(r) \\ \sin F(y) . \cos(\varphi - X) = \cos A \\ \cos F(r) . \cos(\varphi - X) = \cos F(c) \\ \cos F(r) \,.\, \sin A = \cos F(y) \end{cases}$$

$$(K)\quad\begin{cases} \operatorname{tg} F(r) = \sin X \,.\, \operatorname{tg} F(x) \\ \operatorname{tg} F(r) = \sin A \,.\, \operatorname{tg} F(a) \end{cases}$$

$$(L)\quad\begin{cases} \operatorname{tg} F(r) = \sin(\varphi - X) \,.\, \operatorname{tg} F(y) \\ \operatorname{tg} F(r) = \cos A \,.\, \operatorname{tg} F(c) . \end{cases}$$

In KII wird $\sin F(r)$ aus (G) eingesetzt:

$$\cos F(r) = \frac{\sin F(x) \,.\, \cos F(a)}{\sin A},$$

vermöge HIV ergiebt sich dann:

$$[1]\qquad \cos F(y) = \sin F(x) \,.\, \cos F(a),$$

also, von der Bezeichnung abgesehen, die Gleichung (21).

Wird HIV durch GIII dividirt, so kommt:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\cos F(y)}{\cos F(x)}$$

und nach [1]:

[2] $$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} F(x) \,.\, \cos F(a)\,.$$

Ferner dividire man GII durch GIV:

$$\frac{\operatorname{tg} X \,.\, \operatorname{tg} F(x)}{\cos F(r)} = \frac{\sin A \,.\, \operatorname{tg} F(a)}{\cos F(a)}$$

und ersetze hier sin A durch seinen aus HIV folgenden Werth:

$$\operatorname{tg} X = \frac{\cos F(y) \,.\, \operatorname{tg} F(a)}{\cos F(a)} \cot F(x),$$

oder mit Benutzung von [1]:

[3] $$\operatorname{tg} X = \cos F(x) \,.\, \operatorname{tg} F(a)\,.$$

Aus LI und HII folgt:

$$\frac{\operatorname{tg} (\varphi - X) \,.\, \operatorname{tg} F(y)}{\sin F(y)} = \frac{\operatorname{tg} F(r)}{\cos A}$$

oder:

$$\operatorname{tg} (\varphi - X) = \frac{\cos F(y) \,.\, \operatorname{tg} F(r)}{\cos A},$$

und, wenn man den Werth von $\operatorname{tg} F(r)$ aus KII einsetzt:

$$\operatorname{tg} (\varphi - X) = \operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{tg} F(a) \,.\, \cos F(y),$$

also mit Hülfe von [1] und [2]:

$$\operatorname{tg} (\varphi - X) = \operatorname{tg} F(x) \,.\, \sin F(x) \,.\, \sin F(a) \,.\, \cos F(a)$$

und wegen [3]:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} F(x) \,.\, \sin F(x) \,.\, \sin F(a) \,.\, \cos F(a) + \cos F(x) \,.\, \operatorname{tg} F(a)}{1 - \sin^2 F(x) \,.\, \sin^2 F(a)}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} F(a)}{\cos F(x)} \cdot \frac{\cos^2 F(x) + \sin^2 F(x) \,.\, \cos^2 F(a)}{1 - \sin^2 F(x) \,.\, \sin^2 F(a)}$$

oder:

[4] $$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} F(a)}{\cos F(x)},$$

das heisst, die Gleichung (20).

Genau ebenso wird:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} F(c)}{\cos F(y)} = \frac{\operatorname{tg} F(c)}{\sin F(x) \,.\, \cos F(a)},$$

also:

[5] $$\operatorname{tg} F(c) = \sin F(a) \,.\, \operatorname{tg} F(x),$$

was die Gleichung (22) ist.

S. 26, Z. 14—10 v. u. (22, Z. 14—16). Das rechtwinklige Dreieck Fig. 11 liefert eine andre Konstruktion des gemeinsamen Lothes der hier betrachteten beiden Geraden. Man muss zu diesem Zwecke nach Anleitung von S. 242f. die Kathete a' aus der Gleichung $F(a') = A$ bestimmen und den anliegenden Winkel gleich $F(l)$ machen. Da $F(l) < A < \frac{1}{2}\pi$ ist, so

ist $F(l) < F(a')$ und es entsteht wirklich ein rechtwinkliges Dreieck, dessen andre Kathete a liefert, während die Hypotenuse t bestimmt.

Das Dreieck Fig. 11 ist aber noch aus einem andern Grunde merkwürdig. Legt man es nämlich in das von l, a, b, t gebildete Viereck (Fig. 10) so, dass die Kathete a auf a und die Kathete a' auf l fällt, so erhält man, da sich aus $F(l) < F(a')$ ergiebt: $a' < l$, die nebenstehende Figur 9'. In dieser ist augenscheinlich SU parallel RQ und US bildet mit UP denselben Winkel, den die von Q aus zu PS gezogene Parallele mit QP bildet. Demnach ergeben sich hier unmittelbar zwei Konstruktionen für die Gerade, die durch einen gegebenen Punkt geht und zu einer gegebenen Geraden parallel ist.

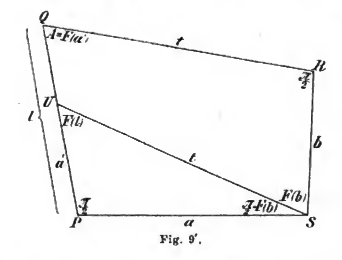


Fig. 9'.

Die erste Konstruktion ist die einfachere. Will man durch S die Parallele zu RQ ziehen, so fälle man von S aus auf RQ das Loth SR, errichte sodann auf RS in S das Loth SP, nehme ferner auf RQ auf der Seite, nach der hin man die Parallele ziehen will, den Punkt Q beliebig an und fälle von Q aus auf SP das Loth QP. In dem Vierecke $QRSP$ ist die dem rechten Winkel P gegenüberliegende Seite QR grösser als die Seite PS, die dem spitzen Winkel Q gegenüberliegt, während QR seinerseits kleiner ist als QS; macht man daher $SU = RQ$, so fällt U zwischen P und Q, und SU wird parallel zu RQ.

Die zweite Konstruktion verfährt so: Um von Q aus die Parallele zu PS zu ziehen, fälle man auf PS das Loth QP, nehme S beliebig an, errichte auf PS in S die Senkrechte SR und fälle auf diese das Loth QR. Macht man endlich $SU = RQ$ und trägt man an PQ in Q den Winkel PUS an, so ist der andre Schenkel dieses Winkels die gesuchte Parallele.

Man wird wohl annehmen dürfen, dass Lobatschefskij diese beiden Konstruktionen gekannt hat, obwohl er es nirgends ausdrücklich sagt. Allgemein bekannt scheint bisher nur die zweite zu sein, die Johann Bolyai in § 34 seines „Appendix" angegeben hat.

S. 26, Z. 3—1 v. u. (22, Z. 13, 12 v. u.). Werden die x von l aus gerechnet, so verwandelt sich (23) in:

$$\sin F(a) \,.\, \cos F(l) = \sin F(x - a) \,.\, \cos F(y)$$

oder nach S. 244, (II) in:

$$\cos F(l) = \frac{\sin F(x) \,.\, \cos F(y)}{1 - \cos F(x) \,.\, \cos F(a)},$$

woraus a vermöge (20) leicht weggeschafft werden kann.

S. 27, Z. 1—7 (22, Z. 11—6 v. u.). Die Gleichung (24) ist allerdings unter der Voraussetzung: $F(l) < A < \frac{1}{2}\pi$ abgeleitet, dasselbe gilt daher auch von der äquivalenten Gleichung (25), die auf Grund von S. 243, (I) aus (24) folgt. Aber für $A = F(l)$ geht (25) in die Gleichung (19) einer Parallelen zur x-Axe über, und für $A = \frac{1}{2}\pi$ verwandelt sich

(24) in die Gleichung der im andern Endpunkte von l auf l senkrechten Geraden (s. die vor (23) vorhergehende Gleichung). Ist $0 < A < F(l)$, so hat man (Fig. 10′) nach S. 25, Z. 7—17:

$$\cos F(y) = \cos F(l) \frac{\sin F(x) \,.\, \cos F(r)}{\cos F(x) + \cos F(r)}.$$

Aus 14 V aber folgt:

$$\operatorname{tg} A = \cos F(x + r) \,.\, \operatorname{tg} F(l)$$

oder bei Benutzung von S. 244, (II):

$$\cos F(r) = \frac{\operatorname{tg} A - \cos F(x) \,.\, \operatorname{tg} F(l)}{\operatorname{tg} F(l) - \cos F(x) \,.\, \operatorname{tg} A},$$

$$\cos F(x) + \cos F(r) = \\ = \frac{\operatorname{tg} A \,.\, \sin^2 F(x)}{\operatorname{tg} F(l) - \cos F(x) \,.\, \operatorname{tg} A},$$

Fig. 10′.

so dass man für $\cos F(y)$ wieder den Ausdruck (24) erhält. Für $A = 0$ ergiebt sich aus (25): $e^x - e^{-x} = 0$, also $x = 0$. Ist endlich $\frac{1}{2}\pi < A < \pi$, so erhält man durch Verlängerung der Geraden nach der Seite der negativen x hin eine Gerade, zu der der Winkel $\pi - A < \pi$ gehört. Da nun die Gleichung (24) ihre Form nicht ändert, wenn man x durch $-x$ und zugleich A durch $\pi - A$ ersetzt, so gilt sie auch für die hier betrachtete Gerade.

Die Gleichung (24) oder (25) stellt daher alle Geraden dar, von denen die y-Axe geschnitten wird, dagegen versagt sie für solche Gerade, die zur y-Axe parallel sind oder die y-Axe überhaupt nicht schneiden. Im zweiten Falle haben nämlich A und l keine Bedeutung mehr, oder, wenn man will, sie werden imaginär, und im ersten Falle wird: $A = 0$ und $l = \infty$ also $F(l) = 0$, so dass die Gleichung (25) zunächst die Form: $0 = 0$ annimmt und erst nach Ausführung eines Gränzübergangs in die Gleichung einer bestimmten Geraden übergeht. So erhält man zum Beispiel, wenn man $A = F(l)$ setzt, den Faktor $\sin A$ weghebt und dann $A = 0$ wählt, die Gleichung:

$$\cos F(y) = e^{-x}$$

der Geraden, die nach der einen Richtung hin zur x-Axe, nach der andern hin zur y-Axe parallel ist.

Alle Geraden überhaupt umfasst die Gleichung (24) oder (25) erst dann, wenn man den Koordinatenanfang auf der x-Axe unbestimmt lässt, wenn man also statt x schreibt: $x + m$, unter m eine beliebige Linie verstanden. Die Gleichung:

$$\cos F(y) = \frac{\cos F(l)}{\sin F(x + m)} - \sin F(l) \,.\, \cot A \,.\, \cot F(x + m)$$

oder nach S. 244, (II):

$$\cos F(y) \,.\, \sin F(x) \,.\, \sin F(m) = \cos F(l) - \sin F(l) \cot A \cos F(m) + \\ + \cos F(x) \{\cos F(l) \,.\, \cos F(m) - \sin F(l) \,.\, \cot A\}$$

stellt daher, wenn man l, m und A alle möglichen reellen, endlichen Werthe annehmen lässt, sämtliche Gerade der Ebene dar, aber allerdings jede unendlich oft.

Will man eine Gleichung haben, die zwei reelle Parameter enthält und die alle Geraden aber jede nur einmal darstellt, so denke man sich vom Koordinatenanfange aus auf die darzustellende Gerade das Loth p gefällt (Fig. 11′), das mit der positiven x-Axe den Winkel ω bilden möge.

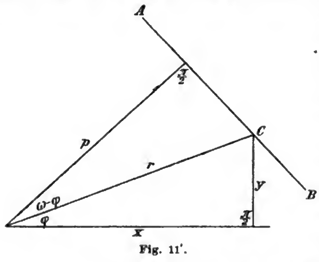


Fig. 11′.

Sind dann x, y die rechtwinkligen Koordinaten eines beliebigen Punktes C der Geraden AB und sind r, φ die Polarkoordinaten desselben Punktes, so ist nach 14 III:

$$\cos F(r) . \cos(\omega - \varphi) = \cos F(p)$$

$$\cos F(r) . \cos \varphi = \cos F(x)$$

und nach 14 V:

$$\operatorname{tg} \varphi = \cos F(y) . \operatorname{tg} F(x),$$

also:

$$\cos F(r) . \sin \varphi = \cos F(y) . \sin F(x),$$

somit ist:

$$\cos \omega . \cos F(x) + \sin \omega . \cos F(y) . \sin F(x) = \cos F(p)$$

die allgemeine Gleichung aller Geraden. Lässt man hier p alle endlichen Werthe $\geqq 0$ durchlaufen und ω für $p > 0$ die Werthe: $0 \leqq \omega < 2\pi$, für $p = 0$ die Werthe: $0 \leqq \omega < \pi$, so erhält man jede Gerade der Ebene und zwar jede nur einmal.

Allem Anscheine nach ist es Lobatschefskij vollständig entgangen, dass jede der beiden Gleichungen (24) und (25) als eine lineare Gleichung zwischen zwei Funktionen von x und y aufgefasst werden kann. Setzt man nämlich zum Beispiel in (24):

$$\cos F(x) = \mathfrak{x}, \quad \cos F(y) . \sin F(x) = \mathfrak{y},$$

so erhält man zwischen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ die lineare Gleichung:

$$\mathfrak{y} = \cos F(l) - \sin F(l) . \cot A . \mathfrak{x}.$$

Andrerseits erhält man aus den vorigen Gleichungen durch Wegschaffung von x:

$$\mathfrak{x}^2 + \frac{\mathfrak{y}^2}{\cos^2 F(y)} = 1$$

und da $F(+\infty) = 0$, $F(-\infty) = \pi$ ist, so erkennt man sofort, dass der Inbegriff aller unendlich entfernten Punkte x, y in den neuen Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ durch die Gleichung:

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = 1$$

dargestellt wird. Man gelangt also hier ganz von selbst zur Gleichung eines Kegelschnittes; benutzt man diesen als Fundamentalkegelschnitt einer projektiven Massbestimmung im Sinne Cayleys, so erhält man eine Massbestimmung, die mit der Lobatschefskijschen Geometrie übereinstimmt (vgl. F. Klein, Ueber die sogenannte nichteuklidische Geometrie. Math. Ann. Bd. IV, S. 573—625 (1871) und Bd. VI, S. 112—145 (1873).

S. 27, Z. 16—10 v. u. (23, Z. 5—10). Der K. B. hat: „$F(\frac{1}{2}z) - F(y)$ und $F(y)$“. — Ein durch O (Fig. 12′) gehender Kreis, dessen Mittelpunkt auf OO' liegt, geht nach § 9 in einen Gränzkreis über, wenn der Mittelpunkt

ins Unendliche rückt; die Durchmesser des Kreises werden dabei zu einander parallel und Axen des Gränzkreises. Demnach ist A ein Punkt dieses Gränzkreises, wennn

$$\angle A'AO = \angle AOO'$$

und AA' parallel OO'. Steht dann BB' auf OA in der Mitte B senkrecht, so ist augenscheinlich auch BB' parallel zu OO' und AA', demnach

$$\angle O'OA = \angle A'AO = F(\tfrac{1}{2}z),$$

$$\angle A'AC = F(y).$$

Fig. 12'.

Von den Gleichungen des Textes folgt jetzt die zweite unmittelbar aus 14 V. Andrerseits wird nach 14 IV:

$$\sin F(z) = \operatorname{tg} F(\tfrac{1}{2}z) \, . \, \operatorname{tg}\,(F(\tfrac{1}{2}z) - F(y))$$

oder, wenn man die linke Seite nach S. 244, (II) umgestaltet:

$$\frac{\sin^2 F(\frac{1}{2}z)}{1 + \cos^2 F(\frac{1}{2}z)} = \operatorname{tg} F(\tfrac{1}{2}z) \, \frac{\operatorname{tg} F(\frac{1}{2}z) - \operatorname{tg} F(y)}{1 + \operatorname{tg} F(\frac{1}{2}z) \, . \operatorname{tg} F(y)},$$

also wie im Texte:

$$2 \operatorname{tg} F(y) = \operatorname{tg} F(\tfrac{1}{2}z).$$

Die Wegschaffung von z ergiebt:

$$2 \sin F(y) = \cos^2 F(y) \, . \, \operatorname{tg} F(x),$$

also:

$$\sin F(y) = -\cot F(x) + \sqrt{1 + \cot^2 F(x)}$$
$$= \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F(x) = e^{-x},$$

wo das Pluszeichen gewählt ist, weil für $x = 0$ auch $y = 0$, also $F(y) = \frac{1}{2}\pi$ wird. Der andre Werth der Quadratwurzel liefert übrigens eine Gleichung:

$$\sin F(y) = -e^x,$$

die nicht durch reelle Werthe von x und y befriedigt werden kann, denn $F(y)$ liegt für reelles y stets zwischen 0 und π.

S. 28, Z. 16 (23, Z. 11 v. u.). Der K. B. hat: $AF <$ statt $>$.

S. 29, Z. 3 f. (24, Z. 12 f.). Die Gleichungen des Textes erhält man, wenn man 14 II und V auf Fig. 13' anwendet. Im K. B. lautet die erste Gleichung irrig:

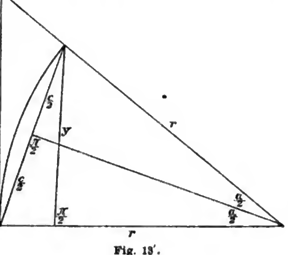


Fig. 13'.

$$\cos F(c) = \sin\alpha \,.\, \cot F(r),$$

dementsprechend steht auch Z. 8, 10 (Z. 17, 18) $n \cos F(c)$ statt: $2n \cot F(\frac{1}{2}c)$.

S. 29, Z. 13 (24, Z. 14 v. u.). Der K. B. hat: $\frac{1}{2}\alpha(e^{-r} - e^{r})$, das Richtige hat A. P.

S. 29. Z. 11—5 v. u. (24, Z. 5—1 v. u.). Nach 14 II ist in Fig. 13′:

$$\operatorname{tg} F(r) = \sin\alpha \,.\, \operatorname{tg} F(y).$$

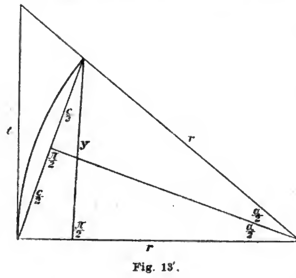


Fig. 13′.

Hält man nun y fest, während man r ins Unendliche wachsen lässt, so verwandelt sich der Kreisbogen in einen Gränzkreisbogen, dessen Länge nach (28) den Werth:

$$\left[\frac{\alpha}{\operatorname{tg} F(r)}\right]_{r=\infty} = \left[\frac{\frac{d\alpha}{dr}}{\frac{d \operatorname{tg} F(r)}{dr}}\right]_{r=\infty} = \left[\frac{1}{\cos\alpha \operatorname{tg} F(y)}\right]_{r=\infty} = \cot F(y)$$

besitzt.

S. 29, Z. 4 v. u.—30, Z. 5 (25, Z. 1—8). Fig. 14′ stellt ein solches Dreieck dar, es ist also: $AA' \parallel CC' \parallel BB'$ und

$$\angle A'AB = \angle B'BA = F(\tfrac{1}{2}c)$$
$$\angle A'AC = \angle C'CA = F(\tfrac{1}{2}b)$$
$$\angle B'BC = \angle C'CB = F(\tfrac{1}{2}a).$$

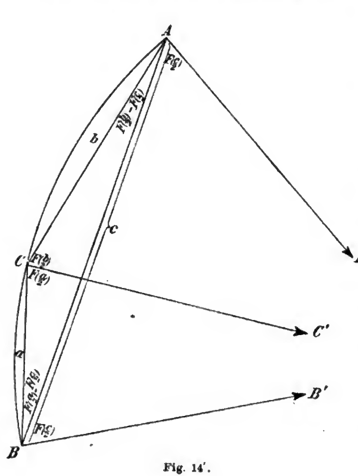


Fig. 14′.

Aus 17 IV folgt nun wegen:

$$\sin F(c) = \frac{\sin^2 F(\frac{1}{2}c)}{1 + \cos^2 F(\frac{1}{2}c)}$$

die Gleichung:

$$\sin^2 F(\tfrac{1}{2}c) . \cos C + \cos(A+B) = \cos^2 F(\tfrac{1}{2}c) . \cos(A-B),$$

oder, da $A+B = C - 2F(\frac{1}{2}c)$ ist:

$$\cos^2 F(\tfrac{1}{2}c) . \cos C + 2 \sin F(\tfrac{1}{2}c) . \cos F(\tfrac{1}{2}c) . \sin C = \cos^2 F(\tfrac{1}{2}c) . \cos(A-B),$$

es ist aber:

$$\cos C - \cos(A-B) = -2 \sin F(\tfrac{1}{2}a) . \sin F(\tfrac{1}{2}b),$$

also ergiebt sich:

$$\cot F(\tfrac{1}{2}c) = \cot F(\tfrac{1}{2}a) + \cot F(\tfrac{1}{2}b).$$

S. 30, Z. 8 (25, Z. 10). Der K. B. hat: $2 \cot F(c)$ statt: $2 \cot F(\frac{1}{2} c)$.

S. 30, Z. 11—15 (25, Z. 14—11 v. u.). In Fig. 15′ ist AA' parallel BB' und AB der Gränzkreisbogen s. Nach (19) lautet die Gleichung der Geraden DB':

$$\cos F(y) = e^{-x} . \cos F(t)$$

und nach (27) die des Gränzkreises AB:

$$\sin F(y) = e^{-x},$$

also wird nach (29):

$$\cot F(y) = s = \cos F(t).$$

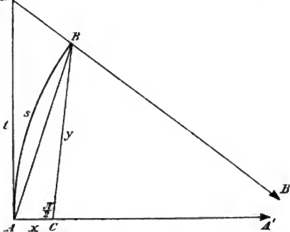


Fig. 15′.

S. 30, Z. 1 v. u., 31, Z. 1 (25, Z. 1 v. u., 26, Z. 1). Diese Gleichungen folgen aus 17 II, III.

S. 31, Z. 2—6 (26, Z. 2—6). Da T stumpf ist, so erhält man:

$$\cos T = -\frac{\cos F(\frac{1}{2} a)}{\sqrt{\cos^2 F(\frac{1}{2} a) + \operatorname{tg}^2 F(y)}} = -\frac{\cos F(y)}{\sqrt{1 + \sin^2 F(y) . \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a)}},$$

ferner ist nach S. 244 (II):

$$\sin F(2q) = \frac{\sin^2 F(q)}{1 + \cos^2 F(q)} = \frac{\operatorname{tg}^2 F(q)}{2 + \operatorname{tg}^2 F(q)}$$

$$= \frac{\sin^2 F(y) . \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a)}{2 + \sin^2 F(y) . \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a)}$$

$$\cos F(2q) = \frac{2\sqrt{1 + \sin^2 F(y) . \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a)}}{2 + \sin^2 F(y) . \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a)}.$$

Ersetzt man jetzt noch $\sin F(y' - y)$, $\cos F(y' - y)$ durch die Ausdrücke S. 244, (II), so wird $\sin F(t)$ gleich:

$$\frac{\sin^2 F(y) . \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a) . \sin F(y) . \sin F(y')}{(2 + \sin^2 F(y) \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a)) (1 - \cos F(y) \cos F(y')) + 2 \cos F(y) (\cos F(y') - \cos F(y))},$$

woraus auf Grund der Gleichung:

$$\sin F(a) = \frac{\operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a)}{2 + \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a)}$$

der Werth (31) des Textes sofort folgt. Andrerseits bekommt man:

$$-\frac{\cot \omega' . \operatorname{tg} F(y)}{\cos F(\frac{1}{2} a)} \sin F(y) \sin F(y') + 1 - \cos F(y) \cos F(y') +$$

$$+ \frac{(\cos F(y') - \cos F(y)) (2 + \sin^2 F(y) \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a))}{2 \cos F(y)} = 0,$$

und wenn man darin vermöge der Gleichung für $\sin F(a)$ und vermöge:

$$\cos F(a) = \frac{2 \cos F(\frac{1}{2} a)}{1 + \cos^2 F(\frac{1}{2} a)} = \frac{2}{\cos F(\frac{1}{2} a) (2 + \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2} a))}$$

die Grössen $\sin F(a)$ und $\cos F(a)$ einführt, so ergiebt sich die auf (31) folgende Gleichung des Textes.

S. 31, Z. 3 (26, Z. 3). Der K. B. hat im Nenner $\sin F(y)$ statt: $\sin^2 F(y)$.

S. 31, Z. 7f. (26, Z. 7f.). Der K. B. hat: $-\cot\omega$ statt: $\cot\omega$. — In den beiden ersten der vier ursprünglichen Gleichungen hat man (s. Fig. 16') y, q, T durch y', q', $\pi - T'$ zu ersetzen, in den beiden letzten dagegen blos: q, T, ω' durch q', T', $\pi - \omega$. Dasselbe erreicht man, wenn man

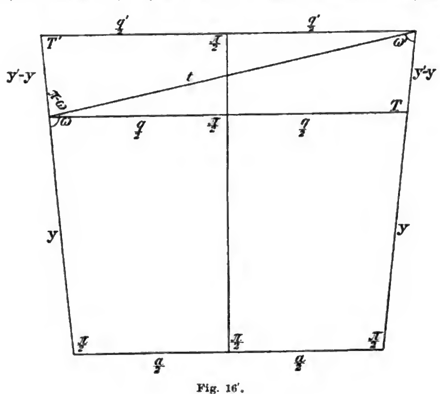


Fig. 16'.

in allen vier Gleichungen: y, y', a, q, T, ω' durch y', y, $-a$, $-q$, T', $\pi - \omega$ ersetzt; demnach bleiben die gefundenen Gleichungen richtig, wenn man y mit y' vertauscht und a, ω' durch $-a$, $\pi - \omega$ ersetzt. Kürzer gelangt man freilich zum Ziele, wenn man beachtet, dass die Gleichungen für t und ω' richtig bleiben, wenn man y mit y' und ω mit ω' vertauscht.

S. 31, Z. 12f. (26, Z. 11f.). Berechnet man $\operatorname{tg}(\omega + \omega')$, so hebt sich in Zähler und Nenner der Faktor:

$$1 - \sin F(a) \,.\, \cos\left(F(y') - F(y)\right).$$

Der K. B. hat im Nenner von Gl. (32): $\sin F(y)$ statt: $\sin F(a)$.

S. 31, Z. 15—17 (26, Z. 14f.). Sind t und a in der Richtung nach y' hin zu einander parallel, so ist: $\omega = F(y)$, $\omega' = \pi - F(y')$, also:

$$\cos F(y)\left(1 - \cos F(a)\right) = \cos F(y') \sin F(a)$$

oder:

$$\cos F(y') = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F(a) \,.\, \cos F(y) = e^{-a} \cos F(y),$$

was mit (19) übereinstimmt. Demnach kommt aus (31):

$$\sin F(t) = \frac{\sin F(a) \sin F(y) \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} F(a) \cos^2 F(y)}}{1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} F(a) \cos^2 F(y)}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2} F(a) \sin F(y) \sqrt{\cos F(a) + \sin^2 \frac{1}{2} F(a) \sin^2 F(y)}}{\cos F(a) + 2 \sin^2 \frac{1}{2} F(a) \sin^2 F(y)},$$

also:

$$\cos F(t) = \frac{\cos F(a)}{\cos F(a) + 2 \sin^2 \frac{1}{2} F(a) \sin^2 F(y)},$$

wo das Pluszeichen genommen ist, weil die Winkel $F(a)$ und $F(t)$ beide spitz sind. Endlich wird:

$$\sin^2 F(y) = \frac{\cos F(a)}{1 - \cos F(a)} \cdot \frac{1 - \cos F(t)}{\cos F(t)}$$
$$= \frac{e^{2a} - 1}{e^{2t} - 1}.$$

S. 31, Z. 14—8 v. u. (26, Z. 11—6 v. u.). Man findet aus:

$$F(y) = 2 \operatorname{arctg} (e^{-y})$$

durch Differentiation:

$$\text{(V)} \qquad dF(y) = -\frac{2e^{-y}dy}{1 + e^{-2y}} = -\sin F(y)\, dy.$$

Ferner wird:

$$\tfrac{1}{2} ds^2 = 1 - \sin F(t) = \frac{1 - \sin F(a) . \cos (F(y) - F(y'))}{1 - \sin F(a) . \cos F(y) . \cos F(y')}$$

oder nach S. 21, Z. 5 v. u.:

$$\tfrac{1}{2} ds^2 = \frac{1 - (1 - \frac{1}{2} dx^2)(1 - \frac{1}{2} dy^2 \sin^2 F(y))}{1 - \cos^2 F(y)}$$
$$= \tfrac{1}{2} dy^2 + \tfrac{1}{2} \frac{dx^2}{\sin^2 F(y)}.$$

Endlich:

$$\cot \omega' = \frac{\cos F(y') - \sin F(a) . \cos F(y)}{\cos F(a) \sin F(y')}$$
$$= \frac{-\sin F(y) . (-\sin F(y)\, dy)}{dx . \sin F(y)}.$$

Aehnlich ergiebt sich:

$$\cot \omega = -\cot \omega',$$

also $\omega' = \pi - \omega$, wenn unendlich kleine Grössen erster Ordnung vernachlässigt werden.

S. 31, Z. 10 v. u. (26, Z. 8 v. u.). Der K. B. hat: $\cot \omega$ statt: $\cot \omega'$.

S. 31, Z. 5—1 v. u. (26, Z. 3 v. u.—27, Z. 1). Werden a, $y' - y$ und q unendlich klein, so kann man nach S. 21, Z. 5 v. u. setzen:

$$\cos F(\tfrac{1}{2} a) = \tfrac{1}{2} a, \quad \operatorname{tg} F(q) = \frac{1}{q}, \quad \cos F(2q) = 2q,$$
$$\sin F(t) = 1 - \tfrac{1}{2} t^2, \quad \sin F(2q) = 1 - 2q^2,$$
$$\sin F(y' - y) = 1 - \tfrac{1}{2} (y' - y)^2,$$

wonach sich aus den vier ersten Gleichungen des § 21 die Gleichungen des Textes leicht ergeben, da augenscheinlich $\operatorname{tg} T = \infty$ wird.

Besonders behalte man die Gleichung:

$$\text{(VI)} \qquad du = \frac{dx}{\sin F(y)}$$

im Gedächtnisse, die sich auf die Fig. 17′ bezieht.

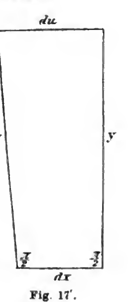


Fig. 17′.

S. 32, Z. 2—6 (27, Z. 2—5). Man erinnere sich an die Gleichung (V); es wird demnach:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{\cos^2 F(x) \, . \sin^2 F\,x)}{\sin^2 F(x) - \sin^2 F(r)} + \frac{\sin^2 F(x)}{\sin^2 F(r)}}$$
$$= \frac{\cot F(r) \, . \sin^2 F(x)}{\sqrt{\sin^2 F(x) - \sin^2 F(r)}}.$$

Die Integration hat keine Schwierigkeit, da $\sin^2 F(x)\, dx = d \cos F(x)$ ist.

S. 32, Z. 7 f. (27, Z. 6), nämlich nach 14 III.

S. 32, Z. 14 (27, Z. 12). Der K. B. hat (24) statt (29).

S. 32, Z. 15 v. u. (27, Z. 11 v. u.). Der Nenner lässt sich in der Form $4UV$ darstellen, wenn man setzt:

$$U = \sin^2 \tfrac{1}{2}(A + F(l)) \, . \, e^{-x} - \sin^2 \tfrac{1}{2}(A - F(l)) \, . \, e^x$$
$$V = \cos^2 \tfrac{1}{2}(A - F(l)) \, . \, e^x - \cos^2 \tfrac{1}{2}(A + F(l)) \, . \, e^{-x},$$

dann wird zugleich:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(A - F(l)) \, . \, e^x}{U} + \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(A - F(l)) \, . \, e^x}{V}.$$

S. 32, Z. 10, 9 v. u. (27, Z. 6 v. u.). Wendet man die Gleichungen 14 I und 17 II auf die beiden Dreiecke in Fig. 18′ an und schafft $\sin F(u)$ weg, so kommt:

$$\cos A \, . \cos F(l) \, . \cos F(s) + \\ + \frac{\sin F(l) \, . \sin F(s)}{\sin F(x) \, . \sin F(y)} = 1.$$

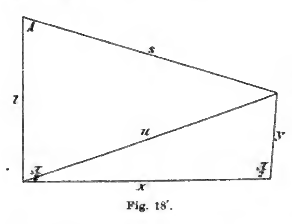


Fig. 18′.

Setzt man hier für $\sin F(s)$ seinen Werth aus (31) ein, nachdem man a, y, y', t durch x, l, y, s ersetzt hat, so bekommt man:

$$\cos A \, . \cos F(l) \, . \cos F(s) + \\ + \frac{\sin^2 F(l)}{1 - \sin F(x) \, . \cos F(l) \, . \cos F(y)} = 1,$$

und hieraus ergiebt sich bei Benutzung von (24) sofort der Ausdruck des Textes für $\cos F(s)$.

S. 32, Z. 8—6 v. u. (27, Z. 5, 4 v. u.). Es wird ja:

$$\cos F(s) = \frac{\cos F(x)}{\cos F(x) + \sin^2 F(l)\,(1 - \cos F(x))}$$

also:

$$\sin^2 F(l) = \frac{\cos F(x)}{1 - \cos F(x)} \cdot \frac{1 - \cos F(s)}{\cos F(s)}.$$

S. 32. In der Fig. 14 des K. B. sind die Buchstaben s und s' nicht zu sehen.

S. 33, Z. 4 (28, Z. 3). Der K. B. hat: Gl. (28), (29) statt: (29), (19).

S. 33, Z. 7 (28, Z. 6). Der K. B. hat: $\sqrt{e^{-2a} - \cos^2 F(y)}$.

S. 33, Z. 8—12 (28, Z. 7—10). Man vgl. hierzu Fig. 19′ und beachte, dass die beiden Gränzkreisbögen auf jeder der beiden Parallelen ein Stück von der Länge t abschneiden.

S. 33, Z. 14—16 (28, Z. 12—14). Der K. B. hat: $s = s' \, . \, e^{-t}$. Eine

Ableitung der Gleichung (36) aus den Eigenschaften des Gränzkreises findet man in § 117 der N. A., hier S. 189 f. Allerdings wird dort nur gezeigt, dass $s' = s . e^{-t}$ ist, unter e eine Zahl > 1 verstanden, für die man bei geeigneter Wahl der Längeneinheit die Grundzahl der natürlichen Logarithmen setzen kann. Später, in § 137, hier S. 212 ff., zeigt sich dann, dass diese Wahl der Längeneinheit mit der in § 12, S. 20 getroffenen übereinstimmt.

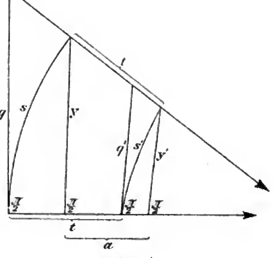


Fig. 19'.

S. 33, Z. 15, 13 v. u. (28, Z. 14, 12 v. u.). Im K. B. lauten diese Gleichungen:

$$\frac{e^{-2t} - 1}{e^{-2a} - 1} = \sin^2 F(y), \qquad \frac{e^{2a} - 1}{e^{2t} - 1} = \sin^2 F(y').$$

S. 33, Z. 11—8 v. u. (28, Z. 11—9 v. u.). Nach 14 II, III ist:

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} \cot F(y) = \cot F(r) . \sin \varphi, \\ \cos F(x) = \cos F(r) . \cos \varphi, \end{cases} \quad \sin F(y) = \frac{\sin F(r)}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi . \cos^2 F(r)}}$$

und umgekehrt, nach 14 I, V:

$$\text{(VIII)} \quad \begin{cases} \sin F(r) = \sin F(x) . \sin F(y) \\ \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} F(x) . \cos F(y), \end{cases}$$

woraus die Gleichungen des Textes leicht folgen. In der Gleichung für $dx : \sin F(y)$ hat der K. B. im Nenner: $\cot^2 F(r)$ statt: $\cos^2 F(r)$.

S. 34, Z 10 (29, Z. 2 v. o.). Nach dieser Zeile sind in den G. A. folgende Worte ausgefallen:

„Ohne diese Annahmen ist es unmöglich ein allgemeines Verfahren zur Messung von Flächenräumen anzugeben. Es ist leicht zu sehen, dass die wirkliche Messung ebenfalls darauf gegründet ist.“

S. 34, Fig. 15. Der Buchstabe h steht auf der Figurentafel des A. P.

S. 34; Z. 19—14 v. u. (29, Z. 8—12). Das ist die einzige Stelle, an der Lobatschefskij die Abstandslinie erwähnt, das heisst, den Ort aller Punkte, die von einer gegebenen Geraden gleichen Abstand haben. Es bleibt daher auch ungewiss, ob er erkannt hat, dass die gewöhnlichen Kreise, die Gränzkreise und die Abstandslinien die drei Arten von Kreisen sind, die man in der nichteuklidischen Geometrie unterscheiden muss. Dagegen macht Johann Bolyai in seinem Appendix von der Abstandslinie den ausgiebigsten Gebrauch. Uebrigens stimmt das Lobatschefskij-sche Verfahren zur Untersuchung des Dreiecksinhalts vollständig mit dem von J. Bolyai angewendeten überein (s. Appendix, § 39 ff.). Lobatschefskij selbst wendet es später auch auf die Untersuchung des Inhalts sphärischer Dreiecke an, s. N. A., § 68, hier S. 133—135.

Uebrigens hat auch schon Saccheri in seinem Euclides ab omni naevo vindicatus, Mailand 1733 den Begriff der Abstandslinie eingeführt und eine Anzahl Sätze über diese Kurve bewiesen, s. P. Th., S. 123 ff.

Man beachte übrigens, dass die Winkelsumme des Vierecks $AFGC$ erhalten wird, wenn man π zu der Winkelsumme des Dreiecks ABC hinzufügt. Demnach haben alle die im Texte besprochenen flächengleichen Dreiecke auch gleiche Winkelsummen.

S. 34, Z. 3 v. u. (29, Z. 11 v. u.). Der K. B. hat: $c < c'$ statt: $c > c'$.

S. 34, Z. 14 v. u. — 35, Z. 13 (29, Z. 12 — 30, Z. 2). Die Gleichung:

$$\sin A = \frac{\cos F(h)}{\cos F(\frac{1}{2}c)}$$

wäre nur richtig, wenn $\angle FAC = \frac{1}{2}\pi$, also $\angle FAD = \frac{1}{2}\pi - A$ wäre; dann würde sie aus 14 III folgen. Dann aber wäre auch $\angle ACG = CAF = \frac{1}{2}\pi$, und das Viereck $AFGC$ enthielte vier rechte Winkel, was unmöglich ist. Aehnlich verhält es sich mit dem Schlusse, der nachher gezogen wird, dass jedes Dreieck ABC in ein rechtwinkliges von gleichem Flächeninhalte verwandelt werden könne; da nämlich flächengleiche Dreiecke stets gleiche Winkelsummen haben, so lässt sich ein Dreieck nur dann in ein rechtwinkliges von demselben Inhalte verwandeln, wenn seine Winkelsumme $> \frac{1}{2}\pi$ ist.

Dieses merkwürdige Versehen Lobatschefskijs hätte sich nur durch vollständige Umgestaltung des ganzen hier in Rede stehenden Abschnittes beseitigen lassen; es erschien daher angemessen, den Text des Originals beizubehalten und die Richtigstellung in einer Anmerkung zu geben.

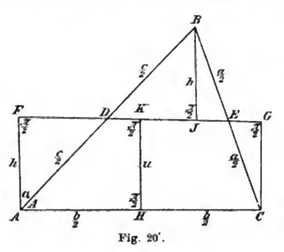


Fig. 20'.

Wir bezeichnen, wie im Texte den Winkel BAC mit A und ausserdem den Winkel FAD (Fig. 20') mit α, wo α positiv oder negativ zu nehmen ist, jenachdem D rechts oder links von F liegt. Dann ist nach 14 III:

$$\cos \alpha = \frac{\cos F(h)}{\cos F(\frac{1}{2}c)},$$

eine Gleichung, die möglich ist, so lange $c \geq 2h$, weil dann $F(\frac{1}{2}c) \leq F(h)$. Man kann also, indem man c_1 aus:

$$\cos F(\tfrac{1}{2}c_1) = \cos \alpha \,.\, \cos F(\tfrac{1}{2}c)$$

bestimmt, das Dreieck ABC ohne Aenderung der Winkelsumme in ein flächengleiches AB_1C verwandeln, dessen Grundlinie wieder AC ist und dessen von A ausgehende Seite $AB_1 = c_1$ ist und auf DE senkrecht steht. Dagegen kann man das Dreieck ABC unter Beibehaltung der Grundlinie AC nur dann, dann aber auch stets, in ein rechtwinkliges von gleichem Inhalte und von gleicher Winkelsumme verwandeln, wenn die auf AC in A errichtete Senkrechte die Gerade ED oder deren Verlängerung trifft.

Ist andrerseits $c' > c$, so kann man α' aus der Gleichung:

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha \,.\, \cos F(\frac{1}{2}c)}{\cos F(\frac{1}{2}c')}$$

bestimmen und gelangt so ohne Aenderung der Winkelsumme und des Flächeninhalts zu einem Dreiecke $AB'C$, das wieder die Grundlinie AC hat und dessen Seite $AC' = c'$ ist. Man erhält dieses Dreieck sofort,

wenn man auf FG den Punkt D' so bestimmt, dass $AD' = \frac{1}{2}c'$ wird, und dann AD' über D' hinaus soweit verlängert, bis man $AC' = c'$ erhält.

Hierin liegt, dass sich zwei beliebige Dreiecke ohne Veränderung ihrer Flächeninhalte und ihrer Winkelsummen stets so verwandeln lassen, dass sie eine Seite gemein haben, die dann als gemeinsame Grundlinie beider Dreiecke benutzt werden kann.

Denken wir uns jetzt wieder das Dreieck ABC (Fig. 20') und das flächengleiche Viereck $AFGC$, in dem $FA = GC = h$ und

$$\llcorner AFG = \llcorner FGC = \tfrac{1}{2}\pi$$

ist. Wir halbiren AC in H und FG in K und ziehen HK; dann sind die Winkel bei H und K augenscheinlich Rechte. Setzen wir daher noch $HK = u$, $FK = v$, so gelten für das Viereck $AHKF$, das drei rechte Winkel enthält, nach S. 25 Gl. (20) die Beziehungen:

$$\operatorname{tg}(A + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} F(\frac{1}{2}b)}{\cos F(u)} = \frac{\operatorname{tg} F(h)}{\cos F(v)},$$

woraus hervorgeht, dass der spitze Winkel $A + \alpha > F(\frac{1}{2}b)$ und $> F(h)$ ist. Ferner ist nach S. 26, Gl. (22):

$$\operatorname{tg} F(\tfrac{1}{2}b) = \sin F(h) \,.\, \operatorname{tg} F(v),$$

also wird:

$$\operatorname{tg}(A + \alpha) = \frac{\sqrt{\sin^2 F(h) + \operatorname{tg}^2 F(\frac{1}{2}b)}}{\cos F(h)} = \frac{\sqrt{\sin^2 F(\frac{1}{2}b) + \operatorname{tg}^2 F(h)}}{\cos F(\frac{1}{2}b)}$$

oder:

$$\cos(A + \alpha) = \cos F(\tfrac{1}{2}b) \,.\, \cos F(h),$$

mithin ist: $A + \alpha < F(\frac{1}{2}b) + F(h)$. Setzen wir daher $\alpha'' = A + \alpha - F(\frac{1}{2}b)$, so wird $\alpha'' < F(h)$ und wir können c'' aus der Gleichung:

$$\cos F(\tfrac{1}{2}c'') = \frac{\cos F(h)}{\cos \alpha''}$$

bestimmen. Damit ist unser ursprüngliches Dreieck in ein flächengleiches $AB''C$ (Fig. 21') verwandelt, das dieselbe Grundlinie $AC = b$ hat, während der Winkel bei A gleich $F(\frac{1}{2}b)$ und die Seite AB'' gleich c'' ist. Die Winkelsumme des neuen Dreiecks ist wieder gleich der des alten.

Schneller gelangt man zu diesem Dreiecke rein geometrisch. Es ist ja unmittelbar klar, dass die von A aus zu HK gezogene Parallele AA' in dem Winkelraume FAH liegt, weil die Geraden AF und HK, die beide auf FK senkrecht stehen, einander nicht schneiden können. Demnach muss diese Parallele AA' die Gerade FK in einem Punkte L zwischen F und K schneiden, und macht man jetzt $LB'' = AL$, so erhält man ein Dreieck $AB''C$, das dem Vierecke $AFGC$ und also auch dem ursprünglichen Drei-

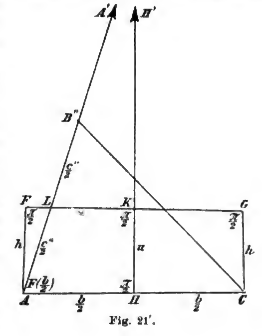


Fig. 21'.

ecke ABC flächengleich ist. Der Winkel $B''AC$ aber ist dann nach der Konstruktion gleich $F(\frac{1}{2}b)$.

Durch das Vorstehende ist gezeigt, dass man zwei beliebige Dreiecke ohne Aenderung ihres Inhalts und ihrer Winkelsummen so verwandeln kann, dass sie die Grundlinie b gemein haben und dass in beiden der eine an der Grundlinie liegende Winkel gleich $F(\frac{1}{2}b)$ ist. Haben nun die ursprünglichen Dreiecke gleichen Flächeninhalt, so müssen offenbar die verwandelten Dreiecke einander decken, demnach sind auch die Winkelsummen der ursprünglichen Dreiecke gleich. Haben andrerseits die beiden ursprünglichen Dreiecke gleiche Winkelsummen, so können die Inhalte der verwandelten Dreiecke nicht verschieden sein, weil sonst der Unterschied der Inhalte ein Dreieck bildete, dessen Winkelsumme gleich π wäre. Folglich sind zwei geradlinige Dreiecke stets dann aber auch nur dann flächengleich, wenn sie gleiche Winkelsummen haben.

Bei allen diesen Betrachtungen ist allerdings zunächst vorausgesetzt, dass alle Ecken der Dreiecke im Endlichen liegen, dass also in keinem der Dreiecke zwei Seiten parallel sind. Merkwürdiger Weise erwähnt Lobatschefskij diesen Fall hier gar nicht. Wir wollen daher auch nicht auf ihn eingehen und nur bemerken, dass der vorhin ausgesprochene Satz bestehen bleibt. Es beruht das darauf, dass jedes geradlinige Dreieck der nichteuklidischen Geometrie einen endlichen Flächeninhalt besitzt, selbst wenn bei ihm parallele Seiten vorkommen. Man kann das leicht beweisen, wenn man sich auf den Satz stützt, dass der von einem Gränzkreisbogen und von zwei parallelen Axen dieses Bogens begränzte Flächenraum stets endlich und zwar der Länge des Bogens proportional ist (vgl. S. 273f.).

S. 35, Z. 15—22 (30, Z. 3—7). Denkt man sich ein beliebiges geradliniges Dreieck durch gerade Linien in eine Anzahl Dreiecke zerlegt, so ist augenscheinlich der Betrag, der der Winkelsumme des ganzen Dreiecks an π fehlt, gleich der Summe der Beträge, die den Winkelsummen der einzelnen Dreiecke an π fehlen. Hierin liegt, dass die Winkelsumme eines geradlinigen Dreiecks abnimmt, sobald der Inhalt des Dreiecks wächst. — Hat man andrerseits zwei beliebige Dreiecke, deren Inhalte verschieden sind, so kann man die nach dem Früheren ohne Aenderung der Inhalte und der Winkelsummen in zwei Dreiecke verwandeln, die eine Seite und einen anliegenden Winkel gemein haben. Von den beiden verwandelten Dreiecken ist jetzt das kleinere ganz in dem grösseren enthalten und hat daher eine grössere Winkelsumme als dieses. Die Betrachtungen des Textes sind also in Ordnung, wenn man für: „und den rechten Winkeln" setzt: „und den anliegenden gleichen Winkeln".

Die übrigen Entwickelungen des ganzen § 25 sind allerdings zunächst nur auf solche Dreiecke anwendbar, deren Winkelsumme $\geqq \frac{1}{2}\pi$ ist, die sich also in flächengleiche rechtwinklige verwandeln lassen. Da man aber jedes beliebige geradlinige Dreieck in zwei rechtwinklige zerlegen kann, so zeigen diese Betrachtungen doch, dass der Betrag, der der Winkelsumme eines Dreiecks an π fehlt, als Mass für den Dreiecksinhalt genommen werden kann.

S. 35, Z. 13—9 v. u. (30, Z. 8—13). Vgl. die Anm. S. 249, Z. 4 v. u.

S. 35, Z. 8—5 v. u. (30, Z. 14—11 v. u.). Man muss sich erst γ aus der zweiten Gleichung bestimmt denken und dann c aus der ersten. Das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten a und c hat die Winkelsumme

$\pi - (n : m) . s = \pi - s'$ und ist daher nach dem Früheren dem Dreiecke A' flächengleich.

S. 35, Z. 2 v. u.—36, Z. 2 (30, Z. 8 v. u.). Die Worte „gleiche" und: „von denen . . . in m gleiche Theile" sind in den G. A. ausgefallen. Das letzte „gleiche" ist ein Zusatz der Uebersetzung und hätte in eckige Klammern eingeschlossen werden sollen.

S. 36, Z. 13—15 (31, Z. 1 f.). $\varDelta$ ist dasselbe, was auf S. 24 (S. 20) mit 2ω bezeichnet ist. Die Ableitung des Werthes von $\operatorname{tg}\omega$ ist in der zugehörigen Anmerkung, S. 249, Z. 4 v. u. auseinandergesetzt.

Da Lobatschefskij hier blos die Winkelsumme des rechtwinkligen geradlinigen Dreiecks durch dessen Seiten ausdrückt, so scheint es angebracht, die Ableitung mitzutheilen, die er später in einer andern Abhandlung für die Winkelsumme eines beliebigen geradlinigen Dreiecks entwickelt hat. Man findet diese Ableitung in der I. G. R., s. K. G. S. 1835, I, 16 ff., G. A. I, S. 78 und in der I. G. F., s. Crelle, Bd. XVII, S. 301 f., G. A. II, S. 588 f.

Aus der Gleichung 17 II auf S. 21 folgt:

$$\cos A = \frac{1}{\sin F(a)} \cdot \frac{\sin F(a) - \sin F(b) . \sin F(c)}{\cos F(b) . \cos F(c)}$$

oder nach S. 243, (I):

$$\cos A = \frac{(e^b + e^{-b})(e^c + e^{-c}) - 2(e^a + e^{-a})}{(e^b - e^{-b})(e^c - e^{-c})},$$

mithin, wenn man $a + b + c = s$ setzt:

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(e^{s-2a} - 1)(e^s - 1)}{(e^{2b} - 1)(e^{2c} - 1)}$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = e^{s-2a} \frac{(e^{s-2b} - 1)(e^{s-2c} - 1)}{(e^{2b} - 1)(e^{2c} - 1)}.$$

Da die Winkel $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ nothwendig spitz sind, so findet man leicht:

$$\cos \tfrac{1}{2} A . \cos \tfrac{1}{2} B = \frac{e^s - 1}{e^{2c} - 1} \cdot e^{c-\frac{1}{2}s} . \sin \tfrac{1}{2} C$$

$$\sin \tfrac{1}{2} A . \sin \tfrac{1}{2} B = \frac{e^{s-c} - e^c}{e^{2c} - 1} \cdot e^{c-\frac{1}{2}s} . \sin \tfrac{1}{2} C$$

$$\sin \tfrac{1}{2} A . \cos \tfrac{1}{2} B = e^{\frac{1}{2}s-a} . \frac{e^{s-2b} - 1}{e^{2c} - 1} \cdot \cos \tfrac{1}{2} C$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A . \sin \tfrac{1}{2} B = e^{\frac{1}{2}s-b} . \frac{e^{s-2a} - 1}{e^{2c} - 1} \cdot \cos \tfrac{1}{2} C$$

$$\cos \tfrac{1}{2} (A + B) = e^{-\frac{1}{2}s} . \frac{e^s + e^c}{e^c + 1} \cdot \sin \tfrac{1}{2} C$$

$$\sin \tfrac{1}{2} (A + B) = e^{\frac{1}{2}s} . \frac{e^{-a} + e^{-b}}{e^c + 1} \cdot \cos \tfrac{1}{2} C$$

$$\cos \tfrac{1}{2} (A + B + C) = \frac{(1 - e^{-a})(1 - e^{-b})}{e^c + 1} . e^{\frac{1}{2}s} . \sin \tfrac{1}{2} C . \cos \tfrac{1}{2} C$$

und somit schliesslich:

$$\text{(IX)}\quad \cos\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\sqrt{(e^s-1)(e^{s-2a}-1)(e^{s-2b}-1)(e^{s-2c}-1)}}{(e^a+1)(e^b+1)(e^c+1)}.$$

Hierbei sind einige Druckfehler der G. A. berichtigt.

Setzt man $A+B+C=\pi-\varDelta$, so liefert diese Formel den Flächeninhalt $\varDelta$ des Dreiecks, ausgedrückt durch die Dreiecksseiten a, b, c; für unendlich kleine Seiten a, b, c verwandelt sie sich in die bekannte Formel der Euklidischen Geometrie:

$$\varDelta = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}.$$

Uebrigens hat Taurinus dieselbe allgemeine Formel für $\varDelta$ schon 1826 in seinen „Geometriae prima elementa“ veröffentlicht, s. P. Th. S. 279.

Eine andre, viel umständlichere Ableitung der Formel für $A+B+C$ giebt Lobatschefskij in der P. G. R. und F., s. G. A. I, S. 536 ff., II, S. 666 ff., und zwar ist die Ableitung deshalb so umständlich, weil er dort nicht die Exponentialfunktion einführt, sondern stets mit den Funktionen $\sin\Pi(a)$ und so weiter arbeitet; die Endformel für $\cos\frac{1}{2}(A+B+C)$ bekommt daher auch eine andre, bei Weitem nicht so einfache Gestalt.

S. 36, Z. 11—7 v. u. (31, Z. 12—16). Man erhält nämlich nach S. 244, (II):

$$\operatorname{tg}(A+A') = \frac{\sin F(\beta)\,.\,\sin F(\alpha)}{\cos F(\alpha)-\cos F(\beta)} = -\operatorname{tg} F(\beta-\alpha),$$

woraus, da die Winkel $A+A'$ und $F(\beta-\alpha)$ beide $<\pi$ sind, die Gleichung des Textes folgt. — Der K. B. hat: $2\pi-A-A'$ statt: $\pi-A-A'$.

S. 37, Z. 11—15 (31, Z. 4 v. u.—32, Z. 1). In Fig. 22′ ist nach 14 IV:

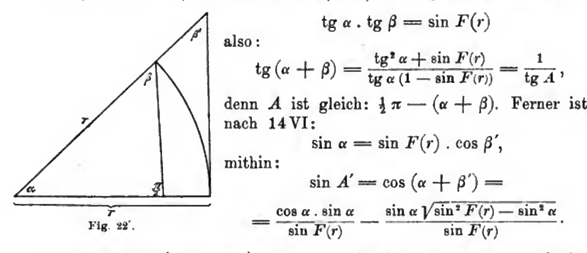


Fig. 22′.

$$\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta = \sin F(r)$$

also:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha+\sin F(r)}{\operatorname{tg}\alpha\,(1-\sin F(r))} = \frac{1}{\operatorname{tg} A},$$

denn A ist gleich: $\frac{1}{2}\pi-(\alpha+\beta)$. Ferner ist nach 14 VI:

$$\sin\alpha = \sin F(r)\,.\,\cos\beta',$$

mithin:

$$\sin A' = \cos(\alpha+\beta') = \frac{\cos\alpha\,.\,\sin\alpha}{\sin F(r)} - \frac{\sin\alpha\sqrt{\sin^2 F(r)-\sin^2\alpha}}{\sin F(r)}.$$

S. 37, Z. 16 f. (32, Z. 2 f.). Beide Ausdrücke nehmen für verschwindendes α den Gränzwerth an:

$$\frac{2\pi(1-\sin F(r))}{\sin F(r)} = \pi(e^r+e^{-r}-2).$$

S. 37, Z. 11 v. u. (32, Z. 8). Erst bei Vergleichung der beiden im Gaussschen Nachlasse vorhandenen Hefte des K. B. habe ich bemerkt, dass der Originaldruck hier und im Folgenden überall dS und S hat, wofür in

den G. A. höchst unnöthiger Weise zum Theile ds und s gesetzt ist. Lobatschefskij wendet durchgehends s und ds bei Bogenlängen an, bei Flächenräumen dagegen S und dS. Von § 32 an haben auch die G. A. das richtige S.

S. 37, Z. 12—3 v. u. (32, Z. 7—14). Es wird:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\, ds = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F(\beta - \alpha) = e^{\alpha - \beta}$$
$$= \cot \tfrac{1}{2} F(\alpha) \,.\, \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} F(\beta)$$
$$= \cot \tfrac{1}{2} F(\alpha) \,.\, \frac{1 - e^{-dx}}{1 + e^{-dx}}.$$

S. 37, Z. 2 v. u.—38, Z. 10 v. o. (32, Z. 12—3 v. u.). Nach Gl. (35), S. 31 ist der Winkel ω' zwischen der Kurventangente und der Ordinate z (s. Fig. 23') durch:

$$\cot \omega' = \frac{dy}{dx} \cdot \sin F(y)$$

bestimmt, während nach S. 263, Z. 19 $\omega = \pi - \omega'$ ist, wenn man unendlich kleine Grössen erster Ordnung vernachlässigt. Nach Gl. (24), S. 27 ist ferner:

$$\cos F(z) = \frac{\cos F(y)}{\sin F(dx)} - \sin F(y) . \cot\omega . \cot F(dx)$$
$$= \frac{e^{dx} + e^{-dx}}{2} \cdot \cos F(y) +$$
$$+ \sin^2 F(y) \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{e^{dx} - e^{-dx}}{2},$$
$$= \cos F(y) + \sin^2 F(y)\, dy$$
$$= \cos F(y + dy)$$
$$= \cos F(y'),$$

wobei die unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung vernachlässigt sind.

Fig. 23'.

Der K. B. hat:

$$„\cot F(z) = \frac{e^{dx} + e^{-dx}}{2} \cdot \cos F(y) - \frac{e^{dx} - e^{-dx}}{2dx} \cdot dy \,.\, \sin^2 F(y)$$

bestimmt, folglich ist: $z = y$."

S. 38, Z. 15 f. (33, Z. 2 f.). Setzt man: $\cos F(x) = u$, so wird: $\sin^2 F(x) \,.\, dx = du$, also:

$$ds = \frac{du}{1 - u^2} \sqrt{\frac{1 - u^2}{\sin^2 F(r)} - 1}$$
$$= \frac{du}{\sin F(r) \sqrt{\cos^2 F(r) - u^2}} - \frac{\sin F(r)\, du}{(1 - u^2) \sqrt{\cos^2 F(r) - u^2}}.$$

Das zweite Differential aber verwandelt sich bei der Substitution:

$$u \sqrt{1 + v^2} = v,$$

das heisst: $v = \cot F(x)$, in:

$$-\frac{\sin F(r)\,dv}{\sqrt{(1+v^2)\cos^2 F(r)-v^2}}=-\frac{\operatorname{tg} F(r)\,dv}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 F(r)\,.\,v^2}}.$$

Integrirt wird von $x=0$ an, wo $F(x)=\frac{1}{2}\pi$ wird.

S. 38, Z. 14 v. u.—39, Z. 3 v. o. (33, Z. 4—18). Nach 14 II, III ist in Fig. 24′:

$$\sin\psi=\frac{\operatorname{tg} F(r)}{\operatorname{tg} F(x)},\quad \cos\varphi=\frac{\cos F(x)}{\cos F(r)},$$

und nach § 25 ist der Flächeninhalt des Dreiecks OAB gleich

$$\tfrac{1}{2}\pi-\varphi-\psi.$$

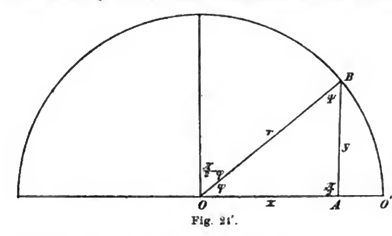


Fig. 24′.

Werden die x nicht mehr von O aus nach rechts, sondern von O' aus nach links gerechnet, so muss man $r-x$ an die Stelle von x setzen und den so entstehenden Ausdruck von dem Viertelkreise:

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sin F(r)}-1\right)$$

abziehen, um den Kreisabschnitt zu erhalten. Da überdies nach S. 27 die Gleichung des Kreises jetzt folgendermassen lautet:

$$\sin F(r-x)\,.\,\sin F(y)=\sin F(r),$$

so wird:

$$\sqrt{1-\frac{\cos^2 F(r-x)}{\cos^2 F(r)}}=\frac{\operatorname{tg} F(r)}{\operatorname{tg} F(y)},$$

$$\sqrt{1-\frac{\cot^2 F(r-x)}{\cot^2 F(r)}}=\frac{\cos F(y)}{\cos F(r)}.$$

Für $r=\infty$ wird schliesslich $F(r)=0$, also:

$$\lim_{r=\infty}\frac{1}{\sin F(r)}\cdot\arcsin\frac{\operatorname{tg} F(r)}{\operatorname{tg} F(y)}=\cot F(y).$$

S. 38, Z. 1 v. u. (33, Z. 15) hat der K. B. $\cos F(x)$ statt: $\cos F(y)$.

S. 39, Z. 4—6 (33, Z. 8, 7 v. u.). Aus $\sin F(y)=e^{-x}$ (s. S. 27, Gl. (27)) und aus S. 263, (V) folgt ja: $dx=\cos F(y)\,.\,dy$, also wird:

$$ds=\frac{\cos^2 F(y)\,dy}{\sin F(y)}=\frac{dy}{\sin F(y)}-\sin F(y)\,dy$$
$$=d\,(\cot F(y))+dF(y).$$

S. 39, Z. 6—12 (33, Z. 7—2 v. u.). Denkt man sich in Fig. 24′ den Punkt O' fest und lässt O auf der Geraden $O'O$ ins Unendliche rücken, so geht der Punkt B, dessen Ordinate y ist, in einen bestimmten Punkt des Gränzkreises durch O' über, der $O'O$ zur Axe hat; φ wird dabei $=0$, $\psi=F(y)$, also der Flächenraum des Dreiecks BAO gleich $\frac{1}{2}\pi-F(y)$. Man kann aber auch so verfahren: In Fig. 25′ sei BB' parallel AA', dann ist nach Gl. (19), S. 25:

$$\cos F(z)=e^{-u}\,.\cos F(y)$$

und demnach der von AB und von den beiden Parallelen AA' und BB' begränzte Flächenraum gleich:

$$\int_0^\infty \cot F(z) \, . \, du = \int_0^\infty \frac{e^{-u} \, . \cos F(y)}{\sqrt{1 - e^{-2u} \, . \cos^2 F(y)}} \cdot du$$

$$= \Big[\arccos\left(e^{-u} \, . \cos F(y)\right)\Big]_0^\infty$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi - F(y) \, .$$

Fig. 25'.

Ist überdies CB ein Gränzkreis mit der Axe CA', so ist der Flächenraum CAB nach dem Früheren $= \cot F(y) - \frac{1}{2}\pi + F(y)$.

S. 39, Z. 12 (33, Z. 2 v. u.) hat der K. B. (39) statt (29).

S. 39, Z. 16 (34, Z. 3). Diese Gleichung trägt im K. B. die Nummer (39).

S. 39, Z. 20—24 (34, Z. 7—9). Der K. B. hat (26) statt (36). Eine solche Ableitung der Gleichung (36) findet sich in § 117 der N. A., hier S. 189 f. Die Gleichung (39a) wird ganz ähnlich abgeleitet. Man denke sich zu diesem Zwecke (Fig. 26', S. 274) zwischen zwei parallelen Geraden als gemeinsamen Axen eine unendliche Reihe von Gränzkreisbögen derart, dass je zwei aufeinanderfolgende wie in Fig. 19', S. 265 auf den Axen die gleichen Stücke t abschneiden. Der erste und grösste dieser Gränzkreisbögen sei gleich s, die folgenden also der Reihe nach gleich: $s \, . \, e^{-t}$, $s \, . \, e^{-2t}$, ... Ist dann S der Inhalt des Flächenstücks zwischen den beiden ersten Gränzkreisbögen und den beiden Axen, so ist S augenscheinlich dem s proportional, und die übrigen Flächenstücke, die von den beiden Axen und von je zwei aufeinanderfolgenden Gränzkreisbögen begränzt werden, sind daher der Reihe nach gleich: $S \, . \, e^{-t}$, $S \, . \, e^{-2t}$, ... Die Summe aller dieser Flächenstücke:

$$S \, . \, (1 + e^{-t} + e^{-2t} + \cdots) = \frac{S}{1 - e^{-t}}$$

ist der Inhalt des Flächenraums zwischen dem Bogen s und den beiden Axen; da aber dieser Inhalt nicht mehr von t abhängen kann, so ist nothwendig:

$$S = c \,.\, s\,(1 - e^{-t}).$$

Hier ist c eine Konstante, die von der Wahl der Flächeneinheit abhängt und die gleich 1 wird, wenn man den vom Bogen 1 und von zwei parallelen Axen begränzten Flächenraum zur Flächeneinheit wählt.

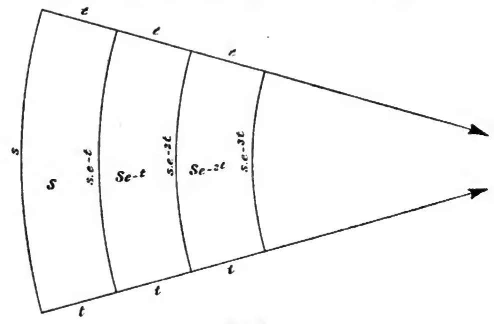


Fig. 26′.

Man findet diese Betrachtungen in der P. G. R. und F., G. A. I, S. 494 und II, S. 622. Uebrigens wendet sie Lobatschefskij schon bald nachher, in § 37, S. 46 f. (S. 40 f.), ganz in derselben Weise auf die Berechnung von Rauminhalten an.

S. 39, Z. 3 v. u.—40, Z. 4 (34, Z. 10—15). Aus Fig. 27′ liest man die Gleichung:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\pi - F(\tfrac{1}{2}r)$$

unmittelbar ab. Nach S. 244, (II) ist nun:

$$\sin F(r) = \\ = \frac{\sin^2 F(\frac{1}{2}r)}{1 + \cos^2 F(\frac{1}{2}r)} \\ = \frac{\cos^2\varphi}{1 + \sin^2\varphi},$$

also:

$$\frac{d\varphi}{\sin F(r)} = \frac{2\,d\varphi}{\cos^2\varphi} - d\varphi.$$

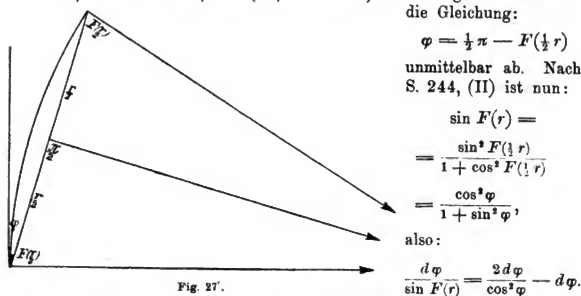


Fig. 27′.

S. 40, Z. 9—16 (34, Z. 11—7 v. u.). Der Flächenraum, der zwischen der x-Axe, der y-Axe und der durch den Endpunkt von x gezogenen Parallelen zur y-Axe liegt, ist nach S. 273 gleich $\frac{1}{2}\pi - F(x)$, woraus der

Werth: $-dF(x)$ für den im Texte beschriebenen unendlich schmalen Flächenraum folgt. Als Gränze dieses letzteren kann man sich statt der x-Axe auch einen unendlich kleinen Gränzkreisbogen denken, der von dem Endpunkte von x ausgeht und die von x und $x+dx$ aus gezogenen Parallelen zu Axen hat. Nach S. 39, Z. 9—12 ist dann: $-dF(x)$ zugleich die Länge dieses Gränzkreisbogens. Denkt man sich ferner das unendlich kleine Kurvenstück, das zwischen jenen beiden Parallelen liegt und von dem das Flächenelement ds begränzt wird, ebenfalls durch einen unendlich kleinen Gränzkreisbogen ersetzt, der die Parallelen zu Axen hat, so hat dieser Gränzkreisbogen nach Gl. (36), S. 33 die Länge: $-e^{-u}.dF(x)$, und durch denselben Ausdruck wird das zwischen ihm und den beiden Parallelen liegende Flächenstück dargestellt. Hiernach ergiebt sich der Werth von ds unmittelbar.

S. 40, Z. 15 (34, Z. 8 v. u.). Der K. B. hat hier: „Formel (37)".

S. 40, Fig. 17. Es erschien zweckmässig diese Figur so zu stellen wie hier, während sie allerdings im K. B. und auf der von Lobatschefskij eigenhändig gezeichneten Figurentafel des A. P. umgekehrt steht, also die x-Axe oben und das $F(x)$ verkehrt.

S. 40, Z. 9, 8 v. u. (35, Z. 2, 3). Der K. B. hat: $e^{-u'}$ statt $e^{u'}$ und: Fig. 11 statt 17.

S. 40, Z. 2 v. u.—41, Z. 6 (35, Z. 7—13). In Fig. 28′ sei AA' parallel OO', dann liefert Gl. 17 II, S. 21 auf das Dreieck OAB angewendet die erste Gleichung des Textes und ebenso erhält man für das Dreieck OAC die Gleichung:

$$-\cos^2 F(x) \,.\, \cos F(u') + \frac{\sin F(u') \,.\, \sin F(x)}{\sin F(r)} = 1,$$

die übrigens aus der Gleichung für u entsteht, wenn man u durch $-u'$ ersetzt. Die Gleichung für u lässt sich nun nach S. 243, (I) schreiben:

Fig. 28′.

$$e^{2u} \,.\, \sin^2 F(x) - 2e^u \frac{\sin F(x)}{\sin F(r)} = -1 - \cos^2 F(x),$$

und es ergiebt sich für e^u der Werth des Textes, wo der Quadratwurzel das Pluszeichen ertheilt ist, weil sich für $x=0$ ergeben muss: $u=r$, also:

$$e^u = \cot \tfrac{1}{2} F(r) = \frac{1 + \cos F(r)}{\sin F(r)}.$$

Dagegen wird:

$$e^{-u'} . \sin F(x) = \frac{1 - \sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) \cos^2 F(x)}}{\sin F(r)},$$

weil für $x = 0$ auch $u' = r$ wird, und dieser Ausdruck lässt sich leicht auf die Gestalt des Textes bringen. Der K. B. hat irrthümlich:

$$e^{u'} = \frac{\sin F(x)}{\sin F(r)} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2 F(x) \sin^2 F(r)}}{1 + \cos^2 F(x)}.$$

S. 41, Z. 7—10 (35, Z. 14—17). Es ist:

$$\int_0^x e^{-u} . \sin F(x) . dx = \int_0^x \frac{\sin F(r) . \sin^2 F(x) . dx}{1 + \sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) . \cos^2 F(x)}},$$

oder, wenn $\cos F(x) = \vartheta = \sin \varphi$ gesetzt wird:

$$= \int_0^\vartheta \frac{\sin F(r) . d\vartheta}{1 + \sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) . \vartheta^2}}$$

$$= \frac{1}{\sin F(r)} \left\{ \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{1 + \vartheta^2} - \int_0^\vartheta \frac{\sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) . \vartheta^2}}{1 + \vartheta^2} \cdot d\vartheta \right\}.$$

Hier ist das zweite Integral in der Klammer gleich:

$$\int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{(1 + \vartheta^2) \sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) . \vartheta^2}} - \sin F(r) \int_0^\vartheta \frac{\operatorname{tg} F(r) . d\vartheta}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 F(r) . \vartheta^2}},$$

und von diesen beiden Integralen verwandelt sich das erste bei der Substitution:

$$\frac{\sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) . \vartheta^2}}{\vartheta} = \omega = \frac{\sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) . \sin^2 \varphi}}{\sin \varphi}$$

in:

$$- \int_\infty^\omega \frac{d\omega}{1 + \omega^2} = \tfrac{1}{2} \pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) . \sin^2 \varphi}}{\sin \varphi}.$$

In dem Ausdrucke des K. B. für s fehlt das Glied:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sin F(r)}.$$

S. 41, Z. 10—12 (35, Z. 10, 9 v. u.). Der eben gefundene Flächenraum s ist gleich der Summe aus dem Dreiecke OAB und dem Kreisausschnitte OBD (Fig. 28'). In dem Dreiecke ist nach Gl. 17 I, S. 21:

$$\operatorname{tg} F(x) . \sin \psi = \operatorname{tg} F(r) . \sin F(x) = \operatorname{tg} F(u) . \sin \omega,$$

also:

$$\sin\psi = \operatorname{tg} F(r) \,.\, \cos F(x)$$

$$\sin\omega = \frac{\sin F(x) \,.\, \operatorname{tg} F(r)}{\operatorname{tg} F(u)} = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \cdot \sin F(x) \,.\, \operatorname{tg} F(r)$$

$$= \frac{\cos^2 F(x) + \sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) \,.\, \cos^2 F(x)}}{\cos F(r) \,.\, (1 + \cos^2 F(x))}$$

oder:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\cos^2 F(x) + \sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) \,.\, \cos^2 F(x)}}{\cos F(x) \,.\, \{1 - \sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) \cos^2 F(x)}\}},$$

da ja ω für positives x nothwendig spitz ist. Hieraus ergiebt sich:

$$\omega = \operatorname{arctg}(\cos F(x)) + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\cos^2 F(r) - \sin^2 F(r) \,.\, \cos^2 F(x)}}{\cos F(x)}.$$

Der Inhalt des Dreiecks ist nun:

$$\pi - F(x) - \psi - \omega,$$

und der des Kreisausschnittes (s. Gl. (38), S. 37):

$$(\tfrac{1}{2}\pi - \omega)\left(\frac{1}{\sin F(r)} - 1\right),$$

also der ganze Inhalt

$$s = \tfrac{1}{2}\pi - F(x) - \psi + \frac{1}{\sin F(r)}(\tfrac{1}{2}\pi - \omega),$$

was mit dem vorhin abgeleiteten Werthe übereinstimmt.

Fig. 28'.

S. 41, Z. 5 v. u.—42, Z. 2 (36, Z. 5—8). Die Quadrate der Abstände zwischen den drei Punkten:

$$x,\ y,\ z \qquad x + dx,\ y,\ z$$
$$x + dx,\quad y + dy,\ z$$

haben für $z = 0$ die Werthe:

$$\frac{dx^2}{\sin^2 Y}, \quad \frac{dx^2}{\sin^2 Y} + dy^2, \quad dy^2$$

(s. S. 31, Gl. (34) und S. 263, Gl. (VI)). Ist $z \neq 0$, so müssen diese Werthe noch durch $\sin^2 Z$ dividirt werden. Ganz ähnlich erhält man hieraus die Ausdrücke des Textes.

S. 42, Z. 3—6 (36, Z. 9—11). Setzt man die im Texte angegebenen Abstandsquadrate der Reihe nach gleich:

$$b^2 = \beta \,.\, dy^2, \quad a^2 = \alpha \,.\, dx^2, \quad c^2 = \alpha \,.\, dx^2 + \beta \,.\, dy^2 - 2\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) dx \,.\, dy,$$

so erhält man für den Inhalt des unendlich kleinen Dreiecks, der auf Grund von § 26 nach den Regeln der Euklidischen Geometrie zu berechnen ist:

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)} = \frac{dx\,.\,dy}{2}\sqrt{\alpha\,.\,\beta-\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

S. 42, Z. 14 (S. 36, Z. 6 v. u.). Diese merkwürdige Schreibweise für eine Gleichung, die man sonst durch ein Doppelintegral ausdrückt, erscheint nicht gerade empfehlenswerth.

S. 42, Z. 10 v. u. (36, Z. 1 v. u.). Im K. B. lautet die Formel:

$$\left(\frac{d^2S}{dX\,dY}\right)=\frac{1}{\sin R}\sqrt{\frac{\cos^2 X}{\cos^2 Z}+\frac{\cot^2 Y}{\cos^2 Z}+\frac{1}{\sin^2 Y\,.\,\sin^2 Z}},$$

wofür in den G. A. höchst überflüssiger Weise die Formel des Textes gesetzt ist. Beide Formeln sind allerdings gleichbedeutend, weil:

$$dX=-\sin X\,.\,dx,\quad dY=-\sin Y\,.\,dy.$$

S. 42, Z. 7—1 v. u. (37, Z. 3—7). Mit 4 dY wird multiplicirt, weil längs der x-Axe vier Oktanten zusammenstossen. Die unbestimmte Integration ergiebt:

$$\int\frac{\sin^2 X\,.\,\sin Y\,.\,dY}{\sqrt{\sin^2 X\,.\,\sin^2 Y-\sin^2 R}}=-\sin X\,.\,\arcsin\frac{\sin X\cos Y}{\sqrt{\sin^2 X-\sin^2 R}},$$

wozu noch die Integrationskonstante kommt. Man beachte, dass bei den Integrationen nach Y und nach X jedesmal $\frac{1}{2}\pi$ als obere Gränze genommen wird, also die Werthe, die den Werthen: $y=0$ und $x=0$ entsprechen.

S. 43, Z. 6—9 (37, Z. 13—16). Nach S. 244, (II) ist nämlich:

$$\cos R-\cos F(r-x)=\frac{\cos X\sin^2 R}{1-\cos X\,.\,\cos R},$$

S. 43, Z. 14—17 (37, Z. 4—1 v. u.). In § 33 war zuerst nach Y und dann nach X integrirt worden. Integrirt man zuerst nach X, so stösst man augenscheinlich auf ein elliptisches Integral. Das Verfahren, das Lobatschefskij hier einschlägt, hat keinen andern Zweck als den, das Doppelintegral auf ein solches zurückzuführen, bei dem die Integrationsordnung gleichgültig ist.

Es handelt sich um das Integral:

$$\iint\frac{\cos R}{\sin^2 R}\cdot\frac{\sin Y\,.\,\sin^2 X\,.\,dX\,.\,dY}{\sqrt{\sin^2 X\,.\,\sin^2 Y-\sin^2 R}}$$

oder:

$$\iint\frac{\cos R}{\sin^2 R}\cdot\frac{\sin^2 X\,.\,dX\,.\,dY}{\sqrt{\cos^2 R-\cos^2 X-\sin^2 R\,.\,\cot^2 Y}}.$$

Man setze:

$$\sin R\,.\,\cot Y=\cos R\,.\,\cos\psi$$

also:

$$dY=\cot R\,.\,\sin\psi\,.\,\sin^2 Y\,.\,d\psi,$$

dann erhält das Doppelintegral die Gestalt:

$$\iint\frac{\cos^2 R\,.\,\sin^2 X\;\;dX\,.\,\sin\psi\,.\,d\psi}{\sin^3 R(1+\cot^2 R\cos^2\psi)\sqrt{\cos^2 R\,.\,\sin^2\psi-\cos^2 X}}=$$

$$=\iint\frac{\cos^2 R}{\sin R}\cdot\frac{\sin\psi\,.\,\sin^2 X\,.\,dX\,.\,d\psi}{(1-\cos^2 R\,.\,\sin^2\psi)\sqrt{\cos^2 R\,.\,\sin^2\psi-\cos^2 X}}.$$

Setzt man ferner, was jetzt sehr nahe liegt:

$$\cos X = \cos R \,.\, \sin \psi \,.\, \sin \varphi,$$

so wird:

$$dX = -\frac{\cos R \,.\, \sin \psi \,.\, \cos \varphi \,.\, d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 R \,.\, \sin^2 \psi \,.\, \sin^2 \varphi}}$$

$$\frac{\sin^2 X \,.\, dX}{\sqrt{\cos^2 R \,.\, \sin^2 \psi - \cos^2 X}} = -\sqrt{1 - \cos^2 R \,.\, \sin^2 \psi \,.\, \sin^2 \varphi} \,.\, d\varphi.$$

Das dürfte ungefähr der Weg sein, auf dem Lobatschefskij zur Einführung von φ und ψ gekommen ist.

Uebrigens kann man φ und ψ auch geometrisch als gewisse Winkel deuten. Es sei (Fig. 29′) O der Mittelpunkt der Kugelfläche und A ein Punkt im Innern der Kugel, dessen Koordinaten x und y beide positiv sind, während $z = 0$ ist. Macht man dann $AC = r$, so ist in dem Dreiecke ABC nach 14II, III:

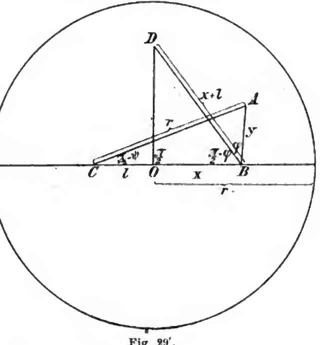


Fig. 29′.

$$\cos \psi = \operatorname{tg} R \,.\, \cot Y,$$

$$\cos F(x + l) = \cos R \,.\, \sin \psi,$$

und, wenn man $BD = x + l$ macht, so ist in dem Dreiecke BOD nach 14III:

$$\cos X = \cos F(x + l) \,.\, \sin \varphi.$$

Da sich x und y von Null bis r ändern können, so können ψ und φ augenscheinlich alle Werthe zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ annehmen. Insbesondere wird für $Y = \frac{1}{2}\pi$: $\psi = \frac{1}{2}\pi$ und für $X = \frac{1}{2}\pi$: $\varphi = 0$.

S. 43, Z. 10—7 v. u. (38, Z. 1—3). Mit 8 $d\psi \,.\, d\varphi$ wird multiplicirt wegen der acht Kugeloktanten. Das Minuszeichen fällt weg, weil sich für $X = \frac{1}{2}\pi$ ergiebt: $\varphi = 0$ und weil also nach φ eigentlich von $\frac{1}{2}\pi$ bis 0 zu integriren wäre.

S. 43, Z. 7—3 v. u. (38, Z. 4—7). Man setze in (46):

$$\cos R \,.\, \sin \psi = x, \quad \cos R = a,$$

also:

$$\sin \psi = \frac{x}{a}, \quad d\psi = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

S. 44, Z. 1—4 (38, Z. 10—13). Setzt man in der zweiten Gleichung: $x = \sin R \,.\, \sin \psi$ und erstreckt man die Integration nach ψ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, so ergiebt sich die erste. Die Beziehung:

$$x H(x) = \int_0^x \frac{E(x)\, dx}{1 - x^2}$$

selbst ist bewiesen, sobald die andre:

$$xH'(x) + H(x) = \frac{E(x)}{1 - x^2}$$

bewiesen ist. Nun aber wird:

$$H(x) + xH'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 - x^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

also muss sein:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2x^2 \sin^2 \varphi + x^4 \sin^4 \varphi - 1 + x^2}{(1 - x^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi = 0,$$

das heisst:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi \,.\, d\varphi}{(1 - x^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \,.\, d\varphi}{(1 - x^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}.$$

In der That findet man für das letzte Integral:

$$-\left[\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{(1 - x^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi \, d\varphi}{(1 - x^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

S. 44, Z. 5—7 (38, Z. 6—4 v. u.). Man erhält zunächst:

$$\frac{\pi R}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \frac{dR \,.\, \cos R \,.\, \sin \psi \sqrt{1 - \sin^2 R \,.\, \sin^2 \psi \,.\, \sin^2 \varphi}}{1 - \sin^2 R \,.\, \sin^2 \psi};$$

aber das Integral nach φ und R nimmt, wenn man: $\sin R \sin \psi = x$ setzt, die Form:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^x \frac{dx \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi}}{1 - x^2} = \sin R \,.\, \sin \psi \,.\, H(\sin R \sin \psi)$$

an, woraus die Formel des Textes unmittelbar folgt.

S. 44, Z. 8—10 (38, Z. 3—1 v. u.). Durch die Substitution:

$$\frac{\sin R \,.\, \sin \varphi \,.\, \cos \psi}{\sqrt{1 - \sin^2 R \,.\, \sin^2 \varphi}} = u$$

erhält man:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin R \,.\, \sin \psi \,.\, d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 R \,.\, \sin^2 \varphi \,.\, \sin^2 \psi}} = -\frac{1}{\sin \varphi} \int^0 \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}$$

$$= \frac{1}{\sin \varphi} \log \left(\frac{1 + \sin R \sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 R \sin^2 \varphi}}\right).$$

S. 44, Z. 11 f. (39, Z. 1 f.). Dann wird nämlich:

$$d\varphi = -\sin\varphi \,.\, dx, \quad \sin F(x) = \frac{2e^x}{e^{2x}+1}$$

und für $\varphi = 0$: $x = \infty$, für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$: $x = 0$.

S. 44, Z. 13 f. (39, Z. 3 f.). Es ist nämlich, wie die Substitution: $e^{-x} = y$ sofort erkennen lässt:

$$\lim_{x=\infty} x \,.\, \log\left(\frac{1 + 2e^{-x} \,.\, \sin R + e^{-2x}}{1 - 2e^{-x} \,.\, \sin R + e^{-2x}}\right) = 0.$$

S. 44, Z. 1 v. u. (39, Z. 9). Man erhält ja für $\psi = \pi - \varphi$:

$$\int_0^\pi d\psi \,.\, \log\sin\tfrac{1}{2}\psi = -\int_\pi^0 d\varphi \,.\, \log\sin\tfrac{1}{2}(\pi - \varphi)$$

$$= \int_0^\pi d\psi \,.\, \log\cos\tfrac{1}{2}\psi.$$

S. 45, Z. 2 f. (39, Z. 11 f.). Der K. B. hat $d\varphi$ statt $d\psi$ und:

$$e^x = e^{-a} \,.\, \cot\tfrac{1}{2}\psi.$$

S. 45, Z. 9—5 v. u. (40, Z. 1—5). Nach S. 42, Gl. (44) wird:

$$\sin^2 Z\left(\frac{d^2S}{dx\,dy}\right)^2 = \frac{\cot^2 R \,.\, \sin^2 Y \,.\, \left(\frac{dR}{dx}\right)^2 + \cos^2 Y}{\sin^2 Y - \sin^2 R} + \frac{1}{\sin^2 R}$$

$$= \frac{\cos^2 R \,.\, \sin^2 Y}{(\sin^2 Y - \sin^2 R)\sin^2 R}\left(1 + \left(\frac{dR}{dx}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1 + \left(\frac{dR}{dx}\right)^2}{\sin^2 R(1 - \operatorname{tg}^2 R \,.\, \cot^2 Y)},$$

ausserdem erinnere man sich der Gleichungen:

$$dX = -\sin X \,.\, dx, \quad dY = -\sin Y \,.\, dy.$$

Bei der Integration ergiebt sich:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{R} \frac{dY}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 R \,.\, \cot^2 Y}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{R} \frac{\sin Y\, dY}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 Y}{\cos^2 R}}}$$

$$= -\cos R \,.\, \left[\arcsin\frac{\cos Y}{\cos R}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{R},$$

also wird:

$$\frac{dS}{dX} = -\frac{2\pi\cos R}{\sin X \,.\, \sin^2 R}\sqrt{1 + \left(\frac{dR}{dx}\right)^2},$$

Der K. B. hat: „Durch . . . und Integration von $Y = R$ bis $Y = \frac{1}{2}\pi$", was der Integration von $y = r$ bis $y = 0$ entsprechen würde.

S. 45, Z. 4 v. u. — 46, Z. 5 (40, Z. 6—13). Die Gleichungen des Textes zwischen X, A, L und R (s. Fig. 30′) erhält man durch Benutzung von S. 20, Gl. 14 V, III, II, ausserdem nehme man noch aus 14 I hinzu:

$$\sin L = \sin X \,.\, \sin R.$$

und erinnere sich an: $dX = -\sin X \,.\, dx$.

Fig. 30′.

S. 46, Z. 8 f. (40, Z. 16 f.). Hier wird:

$$\frac{dR}{dx} = -\operatorname{tg} R, \quad \frac{dS}{dx} = \frac{2\pi}{\sin^2 R} = 2\pi \,.\, e^{2x}.$$

S. 46, Z. 15, 14 v. u. (40, Z. 4, 3 v. u.). Weil nämlich auf der Gränzfläche die Euklidische Geometrie gilt, s. § 9, S. 12 (G. A. S. 10 f.).

S. 47, Z. 1—3 (41, Z. 9—11). Für $c = \infty$ wird dieser Ausdruck gleich $\frac{1}{2} S$, das ist also der Rauminhalt, der begränzt wird von einem Flächenstücke S einer Gränzkugel und von den sämmtlichen durch die Begränzung dieses Flächenstücks gehenden parallelen Axen dieser Gränzkugel.

S. 47, Z. 11—26 (41, Z. 17—5 v. u.). Es sei AB der Gränzbogen b mit den beiden parallelen Axen AA' und BB' (Fig. 31′). Auf der Ebene dieses Gränzbogens denke man sich in A und B die Lothe $AD = BC = a$ errichtet und von D und C aus die Parallelen DD' und CC' zu AA' gezogen, die nach § 8 auch zu BB' und unter einander parallel sind und also in einer Ebene liegen.

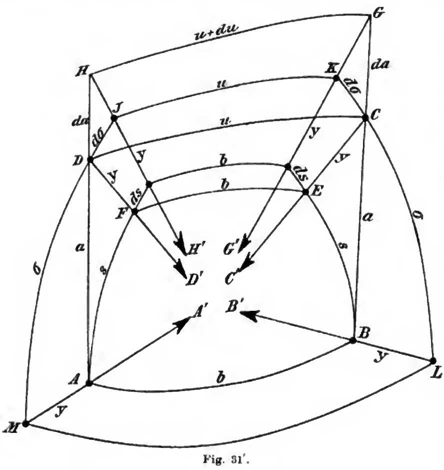


Fig. 31′.

Denkt man sich ferner durch den Bogen AB eine Gränzkugel mit den Axen AA', BB', CC', DD' gelegt, so wird diese die vier durch diese Axen bestimmten Ebenen in einem Gränzbogenvierecke $ABEF$ schneiden, und zwar wird $AF = BE = s$ sein und die Winkel $FAB = EBA = \frac{1}{2}\pi$, folglich nach § 9 auch $FE = AB = b$ und $\angle AFE = BEF = \frac{1}{2}\pi$. Das Gränzbogenviereck ist also ein Rechteck und das bedeutet nach § 9, dass die vier vorhin erwähnten Ebenen paarweise auf einander senkrecht stehen.

Da AD auf AA' und BC auf BB' senkrecht steht und da ausserdem

$AD = BC = a$, $AF = BE = s$ ist, so folgt: $DF = CE = y$, es giebt also in der Ebene $D'DCC'$ eine Gränzlinie, die DD' und CC' zu Axen hat und durch D und C geht. Es sei das der Gränzbogen $DC = u$. Denkt man sich jetzt b veränderlich, während a konstant bleibt, so bleiben s und y konstant, und es wird B den Gränzbogen BA und E den Gränzbogen EF durchlaufen. Die Gerade EC' bleibt parallel zu DD', bewegt sich also ebenso wie der Punkt E in der Ebene $D'DCC'$, und da überdies $CE = DF$ bleibt, so durchläuft der Punkt C den Gränzkreisbogen CD. Denkt man sich daher auf der Ebene $A'ABB'$ in allen Punkten des Gränzbogens AB Senkrechte von der Länge a errichtet, so liegen die Endpunkte dieser Senkrechten sämtlich auf dem Gränzbogen DC.

Der im Texte betrachtete Körperraum P ist nun begränzt von den vier Ebenen durch AA', BB', CC', DD' und von einer Cylinderfläche, die auf der Ebene $A'ABB'$ senkrecht steht und durch den Gränzbogen AB geht. Es ist klar, dass diese Cylinderfläche auch durch den Gränzbogen DC geht. Lässt man jetzt a um da wachsen, so wächst P um ein unendlich kleines Stück dP, das begränzt wird von den vier Ebenen durch DD', CC', GG', HH' und von der Fortsetzung jener Cylinderfläche. Unter Vernachlässigung einer unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung kann man aber das begränzende Cylinderflächenstück $DCGH$ ersetzen durch ein unendlich kleines Stück einer durch DC gelegten Gränzkugel, die auf den vier begränzenden Ebenen das Gränzbogenrechteck $DCKJ$ mit den Seiten: $DC = JK = u$, $DJ = CK = d\sigma$ ausschneidet. Nach S. 33, Gl. (36) ist aber $u = b \,.\, e^y$, $d\sigma = ds \,.\, e^y$, also wird der Flächeninhalt dieses Gränzbogenrechtecks gleich: $u \,.\, d\sigma = b \,.\, ds \,.\, e^{2y}$, und aus Gl. (49), in der jetzt $c = \infty$ zu setzen ist, ergiebt sich: $dP = \frac{1}{2} b \,.\, e^{2y} \,.\, ds$ wie im Texte.

S. 47, Z. 9, 8 v. u. (41, Z. 4, 3 v. u.). Es sei M der Punkt, in dem der durch D gehende Gränzbogen mit der Axe DD' die Axe AA' trifft und $DM = \sigma$, dann ist $AM = FD = y$ und nach Gl. (29), (30) und (36):

$$\sigma = \cot F(a), \quad s = \cos F(a),$$

$$\sigma = s \,.\, e^y,$$

demnach wird wie im Texte:

$$\sin F(a) = e^{-y}.$$

S. 47, Z. 5—1 v. u. (42, Z. 1—4). In der That ist nach S. 39, Z. 9—12 der Flächenraum zwischen dem Gränzbogen $AB = b$ und den beiden Axen AA' und BB' gleich b. Ist andrerseits in Fig. 32' ds ein unendlich kleines Bogenstück einer durch B gehenden Gränzlinie mit den parallelen Axen AA', BB', CC' und ist die Gerade CBA senkrecht zu AA', so unterscheidet sich der unendlich kleine Flächenraum zwischen ds und den beiden Parallelen BB' und DC' nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung

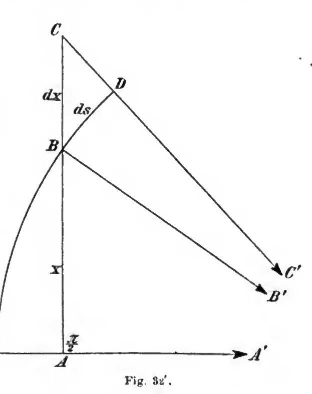


Fig. 32'.

von dem Flächenraume zwischen dx und den beiden Parallelen BB' und CC'. Nun aber ist der Flächenraum zwischen AA', AB und BB' nach S. 39, Z. 6—9 gleich $\frac{1}{2}\pi - F(x)$, also wird der vorhin beschriebene unendlich kleine Flächenraum gleich: $-dF(x)$.

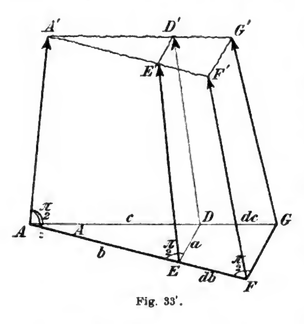


Fig. 33'.

S. 48, Z. 2—11 (42, Z. 5—12). In Fig. 33' sei AA' senkrecht zu der Ebene FAG, ferner seien DE und GF senkrecht zu AF, und EE', DD', FF', GG' seien parallel zu AA', also die Winkel $E'ED$ und $F'FG$ Rechte. Das dP des Textes ist die Pyramide mit der Grundfläche $EFGD$ und den parallelen Kanten EE', FF', GG', DD'. Nach § 38 ist der Rauminhalt dieser Pyramide unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung gleich $\frac{1}{2}a$ multiplicirt mit dem sich ins Unendliche erstreckenden Flächenraume $E'EFF'$, der seinerseits gleich: $-dF(b)$ ist.

S. 48, Z. 12—15 (42, Z. 13—16). Nach S. 20, Gl. 14 V ist:

$$\cot F(b) = \cot A \,.\, \cos F(a) = \cot A \cdot \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}},$$

also:

$$e^{2a} = \frac{1 + \operatorname{tg} A \,.\, \cot B}{1 - \operatorname{tg} A \,.\, \cot B} = \frac{\sin(B + A)}{\sin(B - A)}.$$

S. 48, Z. 16—26 (42, Z. 17—26). Der Ausdruck:

$$\left[\frac{2\pi}{A}\, dP\right]_{A=0} = -\pi \,.\, dB \,.\, \cot B = \pi \,.\, db \,.\, \cos F(b)$$

ist der Raum, der entsteht, wenn das unendlich kleine Flächenstück $E'EFF'$ eine volle Umdrehung um AA' als Axe beschreibt (s. Gl. (54)). Demnach ist:

$$\int_0^b \pi\, db \cos F(b) = -\pi \,.\, \log \sin F(b)$$

der Rauminhalt des im Texte beschriebenen Kegels.

Versteht man jetzt unter P wieder den Inhalt der Pyramide mit der Grundfläche AED und den parallelen Kanten AA', EE', DD', und lässt man den Winkel A um dA wachsen, so wächst P um ein Stück dP, das sich auffassen lässt als ein Stück eines Kegels, dessen Grundkreis den Halbmesser $AD = c$ besitzt und dessen Erzeugende zu AA' parallel sind. Aus der Formel (53) für den Rauminhalt dieses Kegels ergiebt sich für die Pyramide P die später mehrfach benutzte Gleichung:

$$\frac{dP}{dA} = -\tfrac{1}{2} \log \sin F(c),$$

in der man c durch A und b ausdrücken und dann b als konstant betrachten muss.

Es ist ein Mangel, dass Lobatschefskij hier den Buchstaben A für einen Winkel benutzt, der nicht gleich $F(a)$ ist, während $B = F(b)$ ist. Dieselbe Bemerkung ist bei § 40 und 41 zu machen. Von § 43 an werden dagegen die Winkel stets mit griechischen Buchstaben bezeichnet. — Im K. B. fehlt bei Gleichung (53) das zweite π.

S. 49, Z. 8—14 (43, Z. 7—13). Die zu EE' parallele Gerade BB' (Fig. 34′) hat nach S. 25, Gl. (19) die Gleichung:

$$\cos F(y) = e^x \,.\, \cos F(l)\,,$$

weil hier x nach der Seite des Parallelismus hin negativ gerechnet wird. Auf $FJ = y + dy$ schneidet BB' das Stück $FH = y + \delta y$ ab, wo δy durch:

$$\sin^2 F(y) \cdot \frac{\delta y}{dx} = e^x \,.\, \cos F(l)$$
$$= \cos F(y)$$

bestimmt ist. Demnach ist δy gerade der Ausdruck, in den das dy des Textes für $x = \infty$ übergeht. Dasselbe folgt auch daraus, dass die Gleichung des Textes für dy von A frei ist und also auch für $A = 0$, das heisst für $x = \infty$ anwendbar bleibt. Man findet jetzt sofort:

$$dy - \delta y = \frac{2\,dx \,.\, \sin^2 \frac{1}{2} X \,.\, \cos Y}{\cos X \,.\, \sin^2 Y}.$$

S. 49, Z. 14—18 (43, Z. 13—16). Die Kegelschale, die durch Drehung des Flächenraums $B'HJJ'$ um die Axe FE' entsteht, hat nach Gl. (54) den Inhalt:

$$\pi\,(dy - \delta y) \cos F(y) =$$
$$= \frac{2\pi \,.\, dx \,.\, \sin^2 \frac{1}{2} X \,.\, \cos^2 Y}{\cos X \,.\, \sin^2 Y}.$$

Fig. 34′.

Die Summe aller dieser Kegelschalen für $x = 0$ bis $x = x$, also für $X = \frac{1}{2}\pi$ bis $X = X$ ist von dem Kegel abzuziehen, der durch Drehung des Flächenraumes $E'FJJ'$ um AA' entsteht und der nach (54) den Inhalt: $\pi \int dy \cos F(y)$ hat.

S. 49, Z. 10 v. u. (43, Z. 9 v. u.). $\sin X \,.\, \sin Y = \sin C$ nach S. 20, Gl. 14 I.

S. 49, Z. 6 v. u. (43, Z. 6 v. u.). Aus: $\cos X = \cos A \,.\, \cos C$ und aus (55) ergiebt sich bei konstantem c:

$$\sin^2 X \, . \left(\frac{dx}{dA}\right)_{dc=0} = - \sin A \, . \cos C$$

$$\left(\frac{dP}{dA}\right)_{dc=0} = \pi \left\{ - c \sin A + \frac{\sin A \, . \cos C}{1 - \cos^2 A \, . \cos^2 C} \right\}.$$

Andrerseits ist bei konstantem A (s. S. 49, Z. 14 v. u., 4 v. o.):

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_{dA=0} = \pi \, . \cot^2 Y = \pi \, . \sin^2 A \, . \cot^2 C .$$

Sind P und Π die Inhalte der Körper, die durch Drehung des Dreiecks DFE und des Kreisausschnittes DFK (Fig. 35′) um die Axe KD entstehen, so ist, wie ein Blick auf die Figur zeigt, bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung:

$$\left(\frac{d\Pi}{dA}\right)_{dc=0} dA = \left(\frac{dP}{dA}\right)_{dc=0} dA - \left(\frac{dP}{dx}\right)_{dA=0} \cdot \left(\frac{dx}{dA}\right)_{dc=0} \cdot dA ,$$

wo das zweite Glied das Minuszeichen hat, weil $DE = x$ mit wachsendem A abnimmt. Demnach ergiebt sich:

$$\left(\frac{d\Pi}{dA}\right)_{dc=0} = \pi \left\{ - c \sin A + \frac{\sin A \, . \cos C}{1 - \cos^2 A \, . \cos^2 C} + \frac{\sin^2 A \, . \cot^2 C \, . \sin A \, . \cos C}{1 - \cos^2 A \, . \cos^2 C} \right\}$$

$$= \pi \left\{ - c \sin A + \frac{\sin A \, . \cos C}{\sin^2 C} \right\}$$

Fig. 35′.

und hieraus:

$$\Pi = \pi \left(\frac{\cos C}{\sin^2 C} - c \right) (1 - \cos A) .$$

Für $A = \frac{1}{2} \pi$ wird Π gleich der halben Kugel (vgl. S. 50, Gl. (56)):

$$\pi \left(\frac{\cos C}{\sin^2 C} - c \right) = \frac{\pi}{4} (e^{2c} - e^{-2c} - 4c) .$$

S. 49, Z. 5 v. u. — 50, Z. 2 (43, Z. 5 v. u. — 44, Z. 2). Es ist:

$$\cos A \, . \cos C = \cos X$$

oder:

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \cos A \, \frac{e^{2c} - 1}{e^{2c} + 1}$$

$$e^{2x} = \frac{2 + (1 + \cos A)(e^{2c} - 1)}{2 + (1 - \cos A)(e^{2c} - 1)} ,$$

also bis zur dritten Potenz von c genau:

$$x = \tfrac{1}{2}\cos A\left\{2c + \frac{4c^2}{1.2} + \frac{8c^3}{1.2.3} - \tfrac{1}{2}(4c^2 + 8c^3) + \tfrac{1}{3}\, 8c^3 \cdot \frac{3 + \cos^2 A}{4}\right\}.$$

S. 50, Z. 6—9 (44, Z. 6—8). Nach S. 243, (I) ist:

$$\cot Y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = y + \frac{y^3}{3!} + \cdots,$$

woraus hervorgeht, warum im Texte nach Potenzen von $\cot Y$ entwickelt werden kann. Die erste Gleichung des Textes folgt sofort aus der Gl. S. 49, Z. 4: $\sin A = \operatorname{tg} C . \cot Y$; sodann ergiebt sich:

$$\begin{aligned} e^{2x} &= \frac{1 + \cos C - \frac{1}{2}\sin C . \operatorname{tg} C . \cot^2 Y}{1 - \cos C + \frac{1}{2}\sin C . \operatorname{tg} C . \cot^2 Y} \\ &= \cot^2 \tfrac{1}{2} C\left\{1 - \tfrac{1}{2}\sin C . \operatorname{tg} C . \cot^2 Y \cdot \frac{2}{\sin^2 C}\right\} \\ &= e^{2c}\left\{1 - \frac{\cot^2 Y}{\cos C}\right\}. \end{aligned}$$

S. 50, Z. 10—14 (44, Z. 9—12). Die Grundfläche des Kegels hat nach S. 37, Gl. (38) den Werth: $4\pi . \cot^2 F(\frac{1}{2}y)$, wofür, wegen der Kleinheit von y hier: $\pi . \cot^2 F(y)$ gesetzt werden kann. Ferner ist die Kugeloberfläche nach S. 43, Gl. (45):

$$\pi(e^c - e^{-c})^2 = 4\pi \cot^2 C,$$

demnach wird der Kugelinhalt gleich:

$$\left[\frac{\pi\left(c - \frac{1}{2}c . \operatorname{tg}^2 C . \cot^2 Y - c + \dfrac{\cot^2 Y}{2\cos C}\right)}{\pi . \cot^2 Y}\right]_{y=0} \cdot 4\pi . \cot^2 C,$$

das heisst, gleich:

$$2\pi\left(\frac{\cot C}{\sin C} - c\right),$$

was mit dem Werthe des Textes übereinstimmt.

S. 50, Z. 15—7 v. u. (44, Z. 16—10 v. u.). Man vgl. Fig. 36′. Die Gleichung der zu AA' parallelen Geraden BB' lautet hier (s. S. 25, Gl. (19)):

$$\cos F(y) = e^{-x} . \cos F(l),$$

wenn also x um dx wächst, so wächst y um:

$$\delta y = -\frac{\cos F(y)}{\sin^2 F(y)}\, dx$$

und das Stück, das BB' auf der Ordinate $y + dy$ abschneidet wird gleich: $dy - \delta y$.

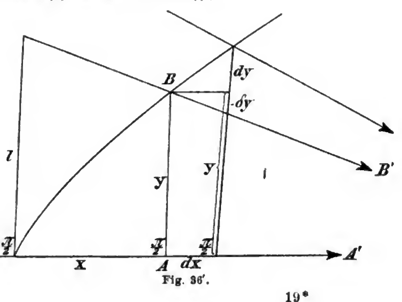


Fig. 36′.

S. 51, Z. 10 (45, Z. 5). Der K. B. hat $\sin X$ statt: $\cos X$.

S. 51, Z. 13—16 (45, Z. 7—9). Der Ausdruck des Textes ist auf S. 286, Z. 5 ff. abgeleitet. Man erhält ihn übrigens noch einfacher, wenn man bedenkt, dass die sphärische Geometrie von dem Euklidischen Parallelenaxiome unabhängig ist und dass also der hier betrachtete kegelförmige Kugelausschnitt zur ganzen Kugel stets in demselben Verhältnisse steht, mag nun die Lobatschefskijsche Geometrie gelten oder die Euklidische.

S. 51, Z. 17—20 (45, Z. 10—12). Hierbei ist die Beziehung: $\cos X = \cos A \,.\, \cos R$ benutzt, vgl. S. 49, Z. 3.

S. 51, Z. 4 v. u.—52, Z. 11 (45, Z. 11—1 v. u.). In Fig. 37′ ist ein Raumelement der hier benutzten Art dargestellt: vier seiner Kanten sind geradlinig, einander parallel und alle gleich $d\xi$, die übrigen sind unendlich kleine Gränzbögen. Das untere Gränzbogenrechteck hat den Flächeninhalt: $d\eta \,.\, d\zeta$, das obere den Inhalt: $d\eta' \,.\, d\zeta'$, wo nach S. 33, Gl. (36):

$$d\eta' \,.\, d\zeta' = e^{2d\xi} \,.\, d\eta \,.\, d\zeta.$$

Nach S. 47, Gl. (50) wird daher das Raumelement gleich:

$$\tfrac{1}{2} d\eta' \,.\, d\zeta' - \tfrac{1}{2} d\eta \,.\, d\zeta = d\xi \,.\, d\eta \,.\, d\zeta.$$

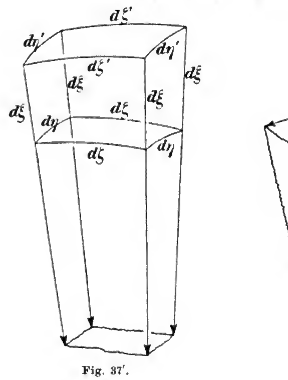


Fig. 37′.

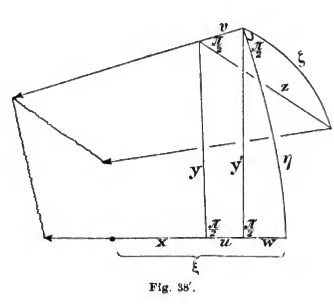


Fig. 38′.

S. 52, Z. 12—17 (46, Z. 1—5). In Fig. 38′ ist nach S. 29, Gl. (29):

$$\zeta = \cot Z, \quad \eta = \cot F(y')$$

und nach Gl. (19), (27) und (33):

$$\cos F(y) = e^{-u} \,.\, \cos F(y'),$$
$$\sin F(z) = e^{-v}, \quad \sin F(y') = e^{-w}$$
$$\frac{e^{2u} - 1}{e^{2v} - 1} = \sin^2 F(y').$$

Hieraus folgt:

$$e^{2u} = 1 + \sin^2 F(y') \,.\, \cot^2 F(z),$$

also:

$$\frac{\cos^2 F(y')}{\cos^2 F(y)} = \frac{1 - \cos^2 F(y') \,.\, \cos^2 F(z)}{\sin^2 F(z)}$$

und somit:

$$\cos^2 F(y') = \frac{\cos^2 F(y)}{1 - \cos^2 F(z) \,.\, \sin^2 F(y)}, \quad \sin^2 F(y') = \frac{\sin^2 F(y) \,.\, \sin^2 F(z)}{1 - \cos^2 F(z) \sin^2 F(y)}$$

$$\eta = \cot F(y') = \frac{\cot Y}{\sin Z},$$

denn η, y' und y haben stets gleiches Vorzeichen. Endlich wird:

$$e^{2u} = \frac{1}{1 - \cos^2 F(z) \,.\, \sin^2 F(y)}, \quad e^{2w} = \frac{1 - \cos^2 F(z) \,.\, \sin^2 F(y)}{\sin^2 F(y) \,.\, \sin^2 F(z)},$$

demnach:

$$\begin{aligned} \xi &= x + u + w \\ &= x - \log \sin Y - \log \sin Z. \end{aligned}$$

S. 52, Z. 18—20 (46, Z. 6 f.). Nach der allgemeinen Regel für die Transformation eines dreifachen Integrals wird:

$$\iiint d\xi\, d\eta\, d\zeta = \iiint dx\, dy\, dz \sum \pm \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

(s. z. B. Kroneckers Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale, hrsg. von Netto, Leipzig 1894, S. 229 ff.). Im vorliegenden Falle ist:

$$\sum \pm \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{\sin Y \,.\, \sin^2 Z}.$$

S. 52, Z. 13—10 v. u. (46, Z. 10—12). Nach S. 41 f. (vgl. die Anmerkung dazu, S. 277) werden die Seiten des unendlich kleinen Parallelepipedons, das die Punkte x, y, z; $x + dx, y, z$; ... bestimmen, gleich:

$$\frac{dx}{\sin Y \,.\, \sin Z}, \quad \frac{dy}{\sin Z}, \quad dz.$$

Dass der Inhalt des Parallelepipedons durch das Produkt dieser Seiten dargestellt wird, geht aus der Anmerkung auf S. 288 hervor, da man jede Kante des Parallelepipedons durch einen unendlich kleinen Gränzbogen und jede Seitenfläche durch ein Stück einer Gränzkugel ersetzen kann.

S. 52, Z. 3 v. u.—53, Z. 3 (46, Z. 11—7 v. u.). Für die Kugel ist:

$$\sin X \,.\, \sin Y \,.\, \sin Z = \sin R,$$

also:

$$\cot Y = \sin X \,.\, \sin Z \,.\, \sqrt{\frac{1}{\sin^2 R} - \frac{1}{\sin^2 X \,.\, \sin^2 Z}},$$

$$\left(\frac{d^2 P}{dX dZ}\right) = \frac{1}{\sin^2 Z} \sqrt{\frac{\sin^2 X - \sin^2 R}{\sin^2 X \,.\, \sin^2 R} - \frac{\cot^2 Z}{\sin^2 X}},$$

und, wenn man:

$$\frac{\sin R \,.\, \cot Z}{\sqrt{\sin^2 X - \sin^2 R}} = u$$

setzt:

$$\frac{dP}{dX} = -\frac{\sin^2 X - \sin^2 R}{\sin X \,.\, \sin^2 R} \int_0^1 du \sqrt{1 - u^2}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\sin X} - \frac{\sin X}{\sin^2 R}\right)$$

oder:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sin^2 X}{\sin^2 R} - 1\right)$$

$$P = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\cos X}{\sin^2 R} - x\right).$$

S. 53, Z. 4—8 (46, Z. 6—3 v. u.). In Fig. 39′ ist nach S. 20, Gl. 14 I:

$$\sin X \,.\, \sin Y = \sin \mathsf{P}, \qquad \sin \mathsf{P} \,.\, \sin Z = \sin R,$$

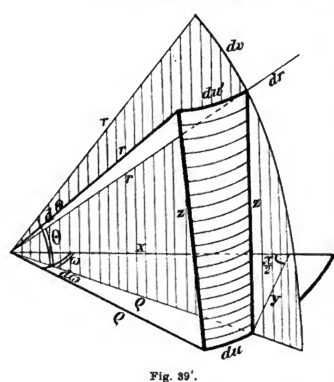


Fig. 39′.

wo $F(\varrho) = \mathsf{P}$ gesetzt ist. Demnach ergiebt sich durch Benutzung von 14 V, II:

$$\text{(X)} \begin{cases} \sin R = \sin X \,.\, \sin Y \,.\, \sin Z \\ \operatorname{tg} \omega = \cos Y \,.\, \operatorname{tg} X \\ \sin \theta = \operatorname{tg} R \,.\, \cot Z. \end{cases}$$

Nach S. 33, Gl. (37) und nach S. 31, Z. 2 v. u. oder S. 263, Gl. (VI) ist ferner:

$$dv = \cot R \,.\, d\theta, \quad du = \cot \mathsf{P} \,.\, d\omega,$$

$$du' = \frac{du}{\sin Z},$$

aber aus Gl. 14 II, V folgt:

$$\operatorname{tg} R = \operatorname{tg} Z \,.\, \sin \theta,$$

$$\operatorname{tg} \theta = \cos Z \,.\, \operatorname{tg} \mathsf{P},$$

also wird:

$$\frac{\cot \mathsf{P}}{\sin Z} = \cos \theta \,.\, \cot R, \quad du' = d\omega \,.\, \cos \theta \,.\, \cot R.$$

Da endlich dr, du', dv paarweise auf einander senkrecht stehen, so kommt:

$$d^3 P = dr \,.\, du' \,.\, dv = d\omega \,.\, d\theta \,.\, dr \,.\, \cos \theta \,.\, \cot^2 R,$$

wie im Texte.

Will man umgekehrt von den Polarkoordinaten zu rechtwinkligen Koordinaten übergehen, so kann man die folgenden Gleichungen benutzen:

$$\text{(XI)} \quad \begin{cases} \cos X = \cos R \,.\, \cos \theta \,.\, \cos \omega \\ \cot Y = \dfrac{\cos R \,.\, \sin \omega \,.\, \cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 R \,.\, \cos^2 \theta}} \\ \cot Z = \cot R \,.\, \sin \theta. \end{cases}$$

Man vgl. hierzu J. G. R. in den K. G. S. 1835, I, S. 51, G. A. I, S. 97 und J. G. F., Crelle XVII, S. 309, G. A. II, S. 599.

S. 53, Z. 12—20 (47, Z. 1—7). In Fig. 40′ ist das Element dP durch die Pyramide $TNQO$ dargestellt. Man muss sich dP als Element des geraden Kreiskegels denken, der entsteht, wenn sich das rechtwinklige Dreieck OTN um TO als Axe dreht. Der Inhalt dieses Kegels hat nach Gl. (55) den Werth: $\pi(r \cos\varphi - h)$, woraus dP durch Multiplikation mit $d\psi : 2\pi$ entsteht.

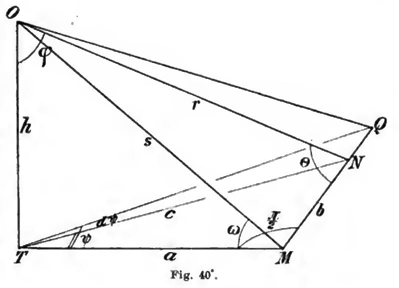


Fig. 40′.

S. 53, Z. 12—9 v. u. (47, Z. 10—12). Da MN auf der Ebene OTM senkrecht steht, so kann man sich die Punkte: T, O, N, M der Reihe nach durch M, N, O, T ersetzt denken, also h, b, ψ, ω, φ, ϑ durch b, h, ω, ψ, ϑ, φ, während a und r ungeändert bleiben.

S. 53, Z. 6—4 v. u. (47, Z. 14—12 v. u.). Nach S. 20, Gl. 14V, III ist:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} H \,.\, \cos F(c), \quad \cos A = \cos F(c) \,.\, \cos\psi,$$

die beiden andern Gleichungen (64) folgen auch aus 14V, III.

S. 54, Z. 4—7 (47, Z. 6—3 v. u.). Aus 64I, II folgt:

$$\cos^2\varphi = \frac{\cos^2\psi}{\cos^2\psi + \cos^2 A \,.\, \operatorname{tg}^2 H}$$
$$= \frac{\cos^2\psi \,.\, \operatorname{tg}^2\omega}{(\cos^2\psi - \cos^2 A)\operatorname{tg}^2\omega + \sin^2 A}$$
$$= \frac{\cos^2\psi \,.\, \sin^2\omega}{\sin^2 A - \sin^2\psi \,.\, \sin^2\omega}.$$

Ferner aus 64II, III:

$$\cos R = \frac{\cos H}{\cos\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\omega \,.\, \cot A}{\cos\varphi}$$
$$= \frac{\cot A}{\cos\omega \,.\, \cos\psi}\sqrt{\sin^2 A - \sin^2\omega \,.\, \sin^2\psi}.$$

Die Wurzeln sind positiv zu nehmen, da alle vorkommenden Winkel spitz sind. Bei Gl. 66III steht im K. B. die Wurzel im Nenner.

S. 54, Z. 9—14 (47, Z. 2 v. u.—48, Z. 4). Hier werden A und H als fest betrachtet und nur R als veränderlich. Aus der Gleichung 66I folgt:

$$-\sin\psi \,.\, d\psi = \frac{\cos A \,.\, \sin H \,.\, \sin R \,.\, \cos R \,.\, dR}{(\sin^2 H - \sin^2 R)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sin\psi = \sqrt{\frac{\sin^2 H \,.\, \sin^2 A - \sin^2 R}{\sin^2 H - \sin^2 R}},$$

also wird nach (64) und (66):

$$\cos\varphi \,.\, d\psi = -\frac{\cos A \,.\, \sin H \,.\, \cos H \,.\, \sin R \,.\, dR}{(\sin^2 H - \sin^2 R)\sqrt{\sin^2 H \,.\, \sin^2 A - \sin^2 R}}\,.$$

Aus $\cot\frac{1}{2}F(h) = e^h$ ergiebt sich überdies: $h = \log\cot\frac{1}{2}H$ und ebenso ist: $r = \log\cot\frac{1}{2}R$. Für $\psi = 0$ wird endlich: $r = MO = s$, also nach S. 20, Gl. 14I:

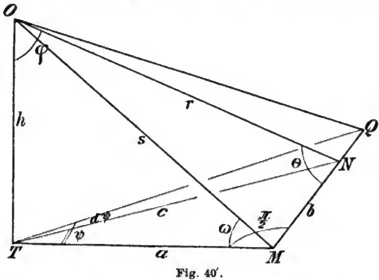


Fig. 40′.

$$\sin R = \sin A \,.\, \sin H.$$

S. 54, Z. 13—4 v. u. (48, Z. 5—13). Da φ, ψ und ω in (67) nicht vorkommen, so hat man nach S. 291, Z. 19f. nur H durch R zu ersetzen. Aus S. 20, Gl. 14I folgt ferner:

$$\sin A \,.\, \sin B = \sin C,$$

$$\sin C \,.\, \sin H = \sin R,$$

mithin ist:

(XII) $$\sin R = \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin H;$$

ässt man daher b von 0 bis b wachsen, das heisst, B von $\frac{1}{2}\pi$ bis B abnehmen, so liefern die entsprechenden Werthe von R die Gränzen des einen Integrals; die Gränzen des andern entsprechen den Werthen $h = 0$ und $h = h$. Endlich ist wegen (XII):

$$\arccos\frac{\cos A \,.\, \sin H}{\sqrt{\sin^2 H - \sin^2 R}} = \arccos\frac{\cos A}{\sqrt{1 - \sin^2 A \,.\, \sin^2 B}}$$

$$= \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} A \,.\, \cos B)\,.$$

S. 54, Z. 8 v. u. (48, Z. 9) hat der K. B. $\log\cot\frac{1}{2}H$ statt: $\log\cot\frac{1}{2}B$.

S. 54, Z. 3 v. u.—55, Z. 13 (48, Z. 12—1 v. u.). Da MO die Gerade TO und TN die Gerade MN trifft, so ist: $A = F(a) > \omega$ und $> \psi$, also der Winkel α immer möglich. Man hat sich α spitz zu denken. In § 46 zeigt sich überdies, dass α auch eine geometrische Bedeutung hat.

Verbindet man die Gleichung (68) mit 66III, so kommt:

(XIII) $$\cos R = \frac{e^{2r} - 1}{e^{2r} + 1} = \frac{\cos A \,.\, \cos\alpha}{\cos\omega \,.\, \cos\psi}$$

oder:

(XIV) $$\cos\alpha = \frac{\cos R \,.\, \cos\psi \,.\, \cos\omega}{\cos A}\,.$$

Hierin liegt die Gleichung des Textes für r.

Andrerseits folgt aus (68), wenn man A und ω als konstant betrachtet:

$$\cos\alpha \,.\, d\alpha = \frac{\sin\omega \,.\, \cos\psi \,.\, d\psi}{\sin A}$$

oder wegen (XIV):

$$\operatorname{tg}\omega \,.\, d\psi = \operatorname{tg} A \,.\, \cos R \,.\, d\alpha,$$

also nach 64II:

$$\cos H \,.\, d\psi = \cos R \,.\, d\alpha$$

und durch Benutzung von 64 III erhält man schliesslich:

$$\text{(XV)} \qquad \cos\varphi \,.\, d\psi = d\alpha.$$

Demnach verwandelt sich (63) in:

$$2P = \int_0^\alpha r \,.\, d\alpha - \psi \,.\, h = \alpha \,.\, r - \psi \,.\, h - \int \alpha\, dr,$$

wie im Texte.

Um hier r durch α auszudrücken, denken wir uns wieder ω und A und also auch H konstant und betrachten blos α, r und ψ als veränderlich, aber r und ψ als Funktionen von α. Dann bekommen wir aus (64), (66) und (68):

$$\cos H = \frac{\cos R \,.\, \cos\psi \,.\, \sin\omega}{\sqrt{\sin^2 A - \sin^2\omega \,.\, \sin^2\psi}}$$

$$= \cos R \,.\, \frac{\sqrt{\sin^2\omega - \sin^2\alpha \,.\, \sin^2 A}}{\sin A \,.\, \cos\alpha},$$

$$\cos H \,.\, \sin A = \cos R \,.\, \sqrt{\sin^2\omega - (\sin^2 A - \sin^2\omega)\,\mathrm{tg}^2\,\alpha},$$

also, da H, A und ω konstant sind:

$$\sin^2 R \frac{dr}{d\alpha}(\sin^2\omega - \sin^2\alpha \sin^2 A) = \cos R\, \mathrm{tg}\,\alpha\,(\sin^2 A - \sin^2\omega).$$

Aber aus (XIII) und (68) folgt:

$$\cos R = \frac{\cos\alpha \,.\, \cos A \,.\, \sin\omega}{\cos\omega\sqrt{\sin^2\omega - \sin^2\alpha \,.\, \sin^2 A}}$$

$$\sin^2 R = \frac{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2 A - \sin^2\omega)}{\cos^2\omega\,(\sin^2\omega - \sin^2\alpha \,.\, \sin^2 A)},$$

also wird:

$$\text{(XVI)} \quad \begin{cases} \dfrac{dr}{d\alpha} = \dfrac{\sin\alpha \,.\, \cos A \,.\, \sin\omega \,.\, \cos\omega}{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)\sqrt{\sin^2\omega - \sin^2\alpha \,.\, \sin^2 A}} \\ \qquad = \dfrac{\sin\alpha \,.\, \cos A \,.\, \cos\omega}{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)\cos\psi}. \end{cases}$$

Endlich ist nach (64), (65):

$$\cos H = \mathrm{tg}\,\omega \,.\, \cot A, \quad \cos B = \mathrm{tg}\,\psi \,.\, \cot A,$$

mithin:

$$\text{(XVII)} \qquad e^{2h} = \frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)}, \quad e^{2b} = \frac{\sin(A+\psi)}{\sin(A-\psi)}.$$

Hierzu ist noch zu bemerken, dass man nach S. 291, Z. 16 ff. in allen Formeln ω mit ψ vertauschen kann, wenn man gleichzeitig b mit h vertauscht und A, R, α ungeändert lässt.

Die Formeln des Textes sind hiermit alle abgeleitet. Uebrigens hat S. 55, Z. 1 (48, Z. 9 v. u.) der K. B. $\int_a \alpha\, dr$, was unverständlich ist, wenn nicht etwa α statt a zu lesen ist und das α bedeuten soll, dass nach α integrirt wird. Ferner hat S. 55, Z. 3 (48, Z. 7 v. u.) der K. B. im Nenner $\cos A \,.\, \cos\omega$ statt: $\cos A \,.\, \cos\alpha$. Auf S. 55, Z. 5 (48, Z. 5 v. u.) ψh und: $\sin^2\alpha - \sin^2\omega$ statt: $2\psi h$ und: $\sin^2\omega - \sin^2\alpha$. Auf Z. 7 (Z. 3 v. u.)

fehlt der Faktor $\cos A$ und steht: $\sin^2\alpha - \sin^2\omega$ statt: $\sin^2\omega - \sin^2\alpha$, $\sin^2\psi - \sin^2\alpha \,.\, \sin^2 A$ statt: $\sin^2\omega - \sin^2\alpha \,.\, \sin^2 A$. Auf Z. 8 (Z. 2 v. u.) fehlt ebenfalls der Faktor $\cos A$ und steht: $\sin^2\alpha - \sin^2\psi$ statt: $\sin^2\psi - \sin^2\alpha$.

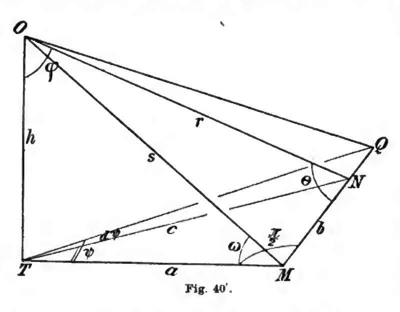


Fig. 40'.

S. 55, Z. 9—5 v. u. (49, Z. 7—10). Vorhin haben wir den Differentialquotienten von r nach α berechnet, indem wir A und ω als konstant und r, ψ als Funktion von α betrachteten. Sehen wir jetzt ψ und r als Funktionen der beiden Veränderlichen α und A an, so erhalten wir den Differentialquotienten von r nach A augenscheinlich aus dem von r nach α (s. Gl. (XVI)), wenn wir α mit A vertauschen; also wird:

$$\frac{\partial r}{\partial A} = \frac{\sin A \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos\omega}{(\sin^2\omega - \sin^2 A)\cos\psi}$$

und, da r für $A = \frac{1}{2}\pi$ verschwindet:

$$r = \cos\alpha \,.\, \cos\omega \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin A \,.\, dA}{(\sin^2 A - \sin^2\omega)\cos\psi}.$$

Das Integral auf S. 55, Z. 5 v. u. ist daher $= 2\int\limits_0 r\,d\alpha$.

S. 55, Z. 5—3 v. u. (49, Z. 10—12). Es ist:

$$\int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{dA}{\sin^2 A - \sin^2\omega} = \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{dA}{\sin(A+\omega) \,.\, \sin(A-\omega)}$$
$$= \frac{1}{\sin 2\omega}\log\frac{\sin(A+\omega)}{\sin(A-\omega)},$$

ferner, da ψ als Funktion von A und α betrachtet wird, nach (68):

$$\frac{\partial}{\partial A}\,\frac{\sin A}{\cos\psi} = \frac{\cos A}{\cos\psi} + \frac{\sin A \,.\, \sin\psi}{\cos^2\psi}\cdot\frac{\sin\alpha \,.\, \cos A}{\sin\omega \,.\, \cos\psi}$$
$$= \frac{\cos A}{\cos\psi} + \frac{\sin^2\psi \,.\, \cos A}{\cos^3\psi},$$

das heisst:

(XVIII) $$\frac{\partial}{\partial A}\,\frac{\sin A}{\cos\psi} = \frac{\cos A}{\cos^3\psi},$$

und ebenso:

(XIX) $$\frac{\partial}{\partial\alpha}\,\frac{\sin\alpha}{\cos\psi} = \frac{\cos\alpha}{\cos^3\psi}.$$

Man beachte überdies, dass:

$$\int_A^{\frac{\pi}{2}} u \,.\, v \,.\, dA = u \int_A^{\frac{\pi}{2}} v \,.\, dA + \int_A^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{du}{dA} \int_A^{\frac{\pi}{2}} v \,.\, dA \right\} dA.$$

S. 55, Z. 4 v. u. — 56, Z. 1 (49, Z. 11—15). Das erste Doppelintegral ist unmittelbar ein Produkt zweier einfacher Integrale, weil von den darin vorkommenden Grössen nur ψ von α abhängt. Das Integral nach A ist schon vorhin angegeben. Das Integral nach α findet man sofort, wenn man bedenkt, dass aus (68) folgt:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sin \omega} \cdot \frac{\sin A \,.\, \cos \alpha}{\cos \psi};$$

es wird also:

$$\int_0^\alpha \frac{\sin A \,.\, \cos \alpha}{\cos \psi} d\alpha = \sin \omega \int_0^\psi d\psi = \psi \,.\, \sin \omega.$$

Andrerseits sind in dem zweiten Doppelintegrale die Gränzen von einander unabhängig, man kann also die Integrationsordnung umkehren. Berücksichtigt man (XIX), so findet man:

$$\int_0^\alpha \frac{\cos \alpha \,.\, d\alpha}{\cos^3 \psi} = \frac{\sin \alpha}{\cos \psi}.$$

Die Endgleichung S. 56, Z. 1 (49, Z. 15) ergiebt sich jetzt ganz von selbst. Im K. B. fehlt bei dieser Gleichung der Faktor 2 vor $\int r\, d\alpha$.

S. 56, Z. 2—9 (49, Z. 7—1 v. u.). Werden nur A und ψ als veränderlich betrachtet, alle übrigen Grössen dagegen als konstant, so ist nach (68):

$$\frac{d\psi}{dA} = \frac{\sin \alpha \,.\, \cos A}{\sin \omega \,.\, \cos \psi},$$

also:

$$\int \frac{\cos A \,.\, dA}{\cos \psi} = \frac{\sin \omega}{\sin \alpha} \cdot \psi + \text{const.},$$

mithin:

$$\int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{dA \,.\, \cos A}{\cos \psi} \cdot \log \frac{\sin (A + \omega)}{\sin (A - \omega)} = - \psi \cdot \frac{\sin \omega}{\sin \alpha} \cdot \log \frac{\sin (A + \omega)}{\sin (A - \omega)} -$$

$$- \frac{\sin \omega}{\sin \alpha} \int_A^{\frac{\pi}{2}} \psi \,.\, dA \cdot \frac{d}{dA} \log \frac{\sin (A + \omega)}{\sin (A - \omega)},$$

da der Logarithmus für $A = \frac{1}{2}\pi$ verschwindet. Demnach ergiebt sich:

$$2 \int r\, d\alpha = \sin 2\omega \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi \,.\, dA}{\sin (A + \omega) \,.\, \sin (A - \omega)}$$

und damit die Gleichung (71).

Ferner wird:

$$dA = \frac{\sin\omega \,.\, \cos\psi \,.\, d\psi}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\omega \,.\, \sin^2\psi}}$$

$$\sin(A+\omega) \,.\, \sin(A-\omega) = \sin^2 A - \sin^2\omega$$
$$= \frac{\sin^2\omega}{\sin^2\alpha}(\sin^2\psi - \sin^2\alpha)\,.$$

Im K. B. fehlt die Gleichungsnummer (71); ferner steht dort in der Endgleichung für P $\frac{1}{2}\cos\omega \,.\, \sin\alpha$ statt: $\frac{1}{2}\cos\omega \,.\, \sin^2\alpha$ und im Nenner unter dem Integrale beide Male $\sin^2 a$ statt: $\sin^2\alpha$.

S. 56, Z. 11—7 v. u. (50, Z. 4—8). Was auf S. 48 bei Ableitung der Gleichung (51) mit A, b, a bezeichnet worden war, das heisst jetzt: ω, a, h, das damalige $F(b) = B$ wird also jetzt gleich $F(a)$ und unter der hier gemachten besonderen Voraussetzung gleich ψ. Der aus (64) folgende Werth von h ist der auf S. 293, Gleichung (XVII) gefundene.

S. 56, Z. 6 v. u.—57, Z. 2 (50, Z. 9—15). Nach einer zu S. 48 gemachten Anmerkung, s. S. 284, Z. 10—1 v. u., ist:

$$\frac{dP}{d\omega} = -\frac{1}{2}\log\sin F(s),$$

wenn man sich in Fig. 40′ die Kanten TN und OM zu MN parallel denkt und MO mit s bezeichnet. Nach S. 20, Gl. 14I ist aber:

$$\sin F(s) = \sin A \,.\, \sin H,$$

und andrerseits folgt aus Gl. 64II:

$$\sin^2 A \,.\, \sin^2 H = 1 - \frac{\cos^2 A}{\cos^2\omega}\,.$$

Dass die beiden Ausdrücke (73) und (74) mit einander identisch sind, erkennt man daraus, dass beide ergeben:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial A\,\partial\omega} = -\frac{1}{2}\,\frac{\sin A \,.\, \cos A}{\cos^2\omega - \cos^2 A}$$

und dass beide sowohl für $A = \frac{1}{2}\pi$ als für $\omega = 0$ verschwinden.

Bei der Gleichung hinter (73) fehlt im K. B. das Minuszeichen vor dem Integrale und bei der Gleichung hinter (74) ist als untere Gränze des Integrals 0 angegeben statt A.

S. 57, Z. 9—11 (50, Z. 3—1 v. u.). Man wird dazu die Gleichung (XVII), S. 293 benutzen. Bei Gleichung (75) fehlt im K. B. der Faktor 2 vor $\cos 2\omega$. Die Seitenzahl [60.2 gehört nicht an Z. 11, sondern an Z. 13.

S. 57, Z. 13—58, Z. 10 (51, Z. 1—25). Man sehe Fig. 41′. Addirt werden die Pyramiden mit den Grundflächen OTM und OVU, abgezogen die mit den Grundflächen OTU und NVU.

S. 58, Z. 10, 9 v. u. (52, Z. 3—5). Man denke sich D in der Form:

$$D = F((c+d) - c)$$

geschrieben und bilde $\sin D$, $\cos D$ nach S. 244, Gl. (II).

S. 58, Z. 5, 4 v. u. (52, Z. 8f.). In der That wird bei Benutzung von Gl. 78IV, I:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\sin C . \cos \psi}{\sin A} \cdot \frac{\cot C}{\cos H}$$
$$= \frac{\cot A}{\cos H}.$$

S. 59, Z. 1—4 (52, Z. 12—9 v. u.). Dies ist die schon auf S. 292 angekündigte geometrische Deutung des in § 44 eingeführten Hülfswinkels α.

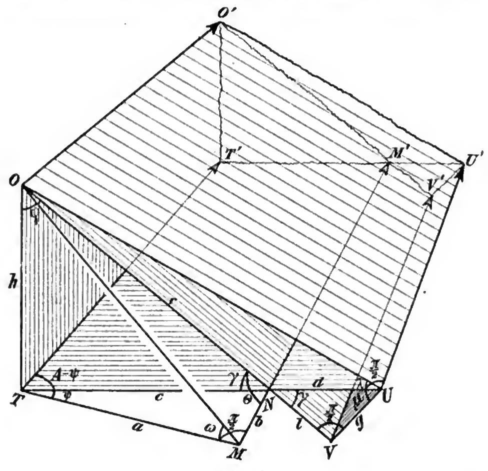


Fig. 41'.

S. 59, Z. 13—16 (53, Z. 2—5). Man beachte, dass in der Formel (75) h und ω gegenüberliegende Stücke des rechtwinkligen Dreiecks MTO sind, das die Grundfläche der Pyramide P' mit den parallelen Kanten MM', TT', OO' bildet, und zwar ist h die Kathete des rechtwinkligen Dreiecks, die auf einer Seitenfläche der Pyramide senkrecht steht. Bei der Pyramide P'' mit der Grundfläche OTU sind die entsprechenden Stücke h und $\angle OUT = \lambda$. Bei der Pyramide P_1, die OVU zur Grundfläche hat, sind es $OV = r + l = h'$ und $\angle OUV = \lambda + \mu = \frac{1}{2}\pi - (\omega - \lambda)$. Bei der Pyramide P_2 endlich, die NVU zur Grundfläche hat, sind es: $NV = l$ und $\angle NUV = \mu = \frac{1}{2}\pi - \omega$.

S. 59, Z. 10—5 v. u. (53, Z. 6—11). In der Gleichung (73) ist der Winkel ω derselbe wie bei (75), aber die untere Gränze A des Integrals ist gleich $F(a)$, wo a die dem Winkel ω anliegende Kathete des rechtwinkligen Dreiecks MTO ist. Bei den übrigen Pyramiden P'', P_1, P_2 treten daher an die Stelle von ω die vorhin angegebenen Winkel, während a der Reihe nach durch: $TU = c + d$, $VU = g$, $VU = g$ zu ersetzen ist, also die untere Gränze A des Integrals durch:

$$F(c + d) = A - \psi, \quad F(g) = G = \tfrac{1}{2}\pi - \alpha, \quad F(g) = \tfrac{1}{2}\pi - \alpha.$$

Zunächst wird daher:

$$4 P_1 = \int_G^{\frac{\pi}{2}} dA \,.\, \log \frac{\sin (A + \frac{1}{2}\pi - (\omega - \lambda))}{\sin (A - \frac{1}{2}\pi + (\omega - \lambda))}$$

$$4 P_2 = \int_G^{\frac{\pi}{2}} dA \,.\, \log \frac{\sin (A + \frac{1}{2}\pi - \omega)}{\sin (A - \frac{1}{2}\pi + \omega)}.$$

Da die Winkel $\frac{1}{2}\pi - (\omega - \lambda) = \lambda + \mu$ und $\frac{1}{2}\pi - \omega = \mu$ beide spitz und beide kleiner als $F(g) = G = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ sind, so ist $\omega > \alpha$ und $\omega - \lambda > \alpha$. Man kann daher in den vorhin angegebenen Ausdrücken für P_1 und P_2 die Veränderliche A durch $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ ersetzen und erhält so die Ausdrücke des Textes.

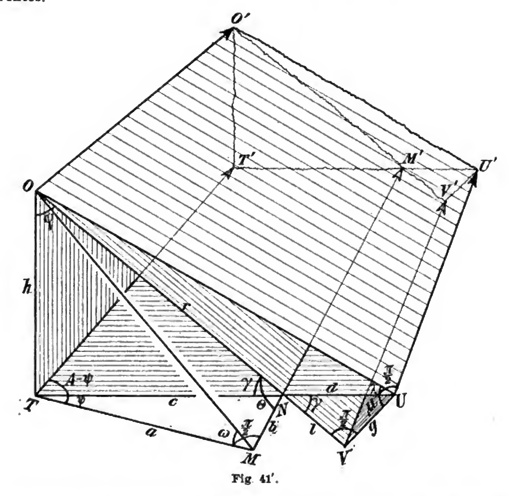


Fig. 41'.

Bei allen vier Gleichungen (81) fehlt im K. B. links der Faktor 4 und in der dritten Gleichung steht $\alpha - \omega + \lambda$ statt: $\omega - \alpha - \lambda$.

S. 59, Z. 4—1 v. u. (53, Z. 11, 10 v. u.). Dass der Werth von P ungeändert bleibt, wenn man h mit b und gleichzeitig ω mit ψ vertauscht, ohne A zu ändern, ist nach S. 291 unmittelbar klar; auch α bleibt dabei nach S. 54, Gl. (68) ungeändert. Bei der genannten Operation bleibt auch r ungeändert, während $L = F(l)$ in $L' = F(l')$ übergeht, wo L' nach (79) aus:

$$\cos L' = \cot \psi \,.\, \mathrm{tg}\, \alpha$$

zu bestimmen ist; demnach bekommt h' den neuen Werth: $h'' = r + l'$. Andrerseits tritt an die Stelle von λ ein neuer Winkel λ', der nach (79) aus:

$$\operatorname{tg} \lambda' = \cos B \,.\, \operatorname{tg} (A - \omega)$$

zu entnehmen ist. Nach S. 293, Z. 12 v. u. ist:

$$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{tg} \omega \,.\, \cot A \,.\, \operatorname{tg} (A - \psi)$$

$$\operatorname{tg} \lambda' = \operatorname{tg} \psi \,.\, \cot A \,.\, \operatorname{tg} (A - \omega).$$

Da nun $A = F(a)$, ω und ψ, solange die Pyramide P nicht eine ganz besondere Gestalt hat, von einander unabhängig sind, so wird λ' im allgemeinen von λ verschieden sein und ebenso l' von l, h'' von h'.

S. 60, Z. 2—6 (53, Z. 9—6 v. u.). In Fig. 42' ist $LMNO$ die Grundfläche der betrachteten Pyramide, die Kante MM' steht auf der Grundfläche senkrecht und die übrigen LL', OO', NN' sind zu MM' parallel. Auf Z. 4 (Z. 9, 8 v. u.) hat der K. B. h, a, h', a' statt: h, a, a', h'.

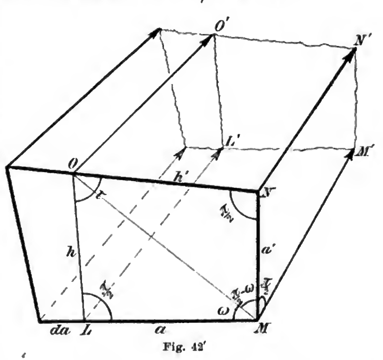


Fig. 42'

S. 60, Z. 8f. (53, Z. 4, 3 v. u.). Wächst a um da, so wächst die vierseitige Pyramide um ein unendlich kleines Stück dP, das man unter Vernachlässigung einer unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung ersetzen kann durch den Zuwachs $d\Pi$, den die dreiseitige Pyramide mit der Grundfläche MLO und den parallelen Kanten MM', LL', OO' erhält, wenn a um da wächst, während $\angle OML = \omega$ konstant bleibt. Dieser Zuwachs $d\Pi$ hat aber nach S. 48, Gl. (51) den Werth: $d\Pi = -\frac{1}{2} h \,.\, dF(a) = -\frac{1}{2} h \,.\, dA$.

Aus: $\sin A \,.\, \cos H = \cos A'$ folgt:

$$\frac{e^{2h} - 1}{e^{2h} + 1} = \frac{\cos A'}{\sin A},$$

also wird:

$$-\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{A} h \,.\, dA = \frac{1}{4} \int_{A}^{\frac{\pi}{2}} dA \,.\, \log \frac{\sin A + \cos A'}{\sin A - \cos A'}.$$

S. 60, Z. 10 v. u.—61, Z. 7 (54, Z. 8—20). Es ist ja:

$$\frac{\sin A + \cos A'}{\sin A - \cos A'} = \frac{\sin (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}(A - A')) \,.\, \cos (\frac{1}{2}(A + A') - \frac{1}{4}\pi)}{\cos (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}(A - A')) \,.\, \sin (\frac{1}{2}(A + A') - \frac{1}{4}\pi)}$$

und es wird gesetzt:

$$x = \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}(A - A'), \quad y = \tfrac{1}{2}(A + A') - \tfrac{1}{4}\pi.$$

Ferner ergiebt sich, wenn man $x = \frac{1}{2}\pi - u$ setzt:

$$\int\limits_{\frac{\pi - A'}{2}}^{\frac{A'}{2}} dx \,.\, \log \operatorname{tg} x = -\int\limits_{\frac{A'}{2}}^{\frac{\pi - A'}{2}} du \,.\, \log \cot u = 0.$$

Endlich erhält man bei der Substitution: $\log \cot x = z$:

$$dx = -\,dz \,.\, \sin^2 x \,.\, \cot x = -\frac{e^z\,dz}{1 + e^{2z}},$$

$$dx \,.\, \log \operatorname{tg} x = \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z}}.$$

S. 61, Z. 2 (54, Z. 11 v. u.) steht im K. B.: $+\,2 \cos \omega$ statt: $+\,2 \cos 2\omega$.

S. 61, Z. 14—16 (55, Z. 3—5). Die Gleichung (83) ergiebt sich, wenn man noch die frühere Gleichung: $\cos A' = \sin A \,.\, \cos H$ zuzieht. Aus $\operatorname{tg} H' = \operatorname{tg} \omega \,.\, \operatorname{tg} H$ oder:

$$\frac{e^{h'}}{e^{2h} - 1} = \operatorname{tg} \omega \cdot \frac{e^h}{e^{2h} - 1}$$

folgt:

$$e^{2h'} - e^{h'}(e^h - e^{-h}) \cot \omega = 1.$$

S. 61, Z. 17 (55, Z. 6). Ausser: $\cos A' = \sin A \,.\, \cos H$ besteht offenbar auch noch die Gleichung: $\cos A = \sin A' \,.\, \cos H'$, die übrigens auch aus:

$$\cos H' \,.\, \operatorname{tg} A' = \cot \omega = \frac{\cos A}{\cos A'}$$

unmittelbar folgt. Also ergiebt sich:

$$\cos^2 A' + \sin^2 A' \,.\, \cos^2 H \,.\, \cos^2 H' = \cos^2 H$$

und:

$$\sin A' = \frac{\sin H}{\sqrt{1 - \cos^2 H \,.\, \cos^2 H'}}, \quad \cos A' = \frac{\cos H \,.\, \sin H'}{\sqrt{1 - \cos^2 H \,.\, \cos^2 H'}}$$

$$\sin A = \frac{\sin H'}{\sqrt{1 - \cos^2 H \,.\, \cos^2 H'}}, \quad \cos A = \frac{\sin H \,.\, \cos H'}{\sqrt{1 - \cos^2 H \,.\, \cos^2 H'}},$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist, da die Winkel A, A', H, H' alle spitz sind. Nunmehr wird (vgl. S. 244, (II)):

$$\cos(A - A') = \frac{\sin H \,.\, \sin H'}{1 - \cos H \,.\, \cos H'} = \sin F(h' - h)$$

$$\cos(A + A') = \frac{-\sin H \,.\, \sin H'}{1 + \cos H \,.\, \cos H'} = -\sin F(h' + h)$$

$$\sin(A - A') = -\cos F(h' - h), \quad \sin(A + A') = \cos F(h' + h),$$

mithin:

$$A - A' = F(h' - h) - \tfrac{1}{2}\pi, \quad A + A' = \tfrac{1}{2}\pi + F(h' + h)$$

$$\cot(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}(A - A')) = e^{h' - h}, \quad \cot(\tfrac{1}{2}(A + A') - \tfrac{1}{4}\pi) = e^{h' + h}.$$

S. 61, Z. 12—8 v. u. (55, Z. 7—9). Der Fall $h = \infty$ tritt ein, wenn in Fig. 42′ LO zu MO parallel wird, also $F(a) = \omega$ ist, dann aber wird auch NO zu MO parallel, und es ist also $h' = \infty$, $F(a') = \frac{1}{2}\pi - \omega$. Man kann in diesem Falle in der Gleichung (82) $h' = h$ setzen und bekommt:

$$\int_0^\infty \frac{2h(e^{2h} + e^{-2h})\,dh}{e^{4h} + e^{-4h} - 2\cos 4\omega} = \frac{1}{2\sin 2\omega}\int \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z}},$$

wo das Integral rechts von $z = \log\cot\omega$ bis $z = \infty$ geht. Ersetzt man hier h durch $\frac{1}{2}h$ und ω durch $\frac{1}{2}\omega$, so kommt man auf die Gleichung (84) des Textes.

S. 61, Z. 5, 3 v. u. (55, Z. 12, 14). Im K. B. steht beide Male rechts $\frac{1}{2}$ statt 2. Da bei der Pyramide mit der Grundfläche MNO die Grössen: A' und $\frac{1}{2}\pi - \omega$ an die Stelle von A und ω treten, so ergiebt sich:

$$\int_{A'}^{\frac{\pi}{2}} dA' \log\frac{\sin(A' + \frac{1}{2}\pi - \omega)}{\sin(A' - \frac{1}{2}\pi + \omega)} = \int_{A'}^{\frac{\pi}{2}} dA' \,.\, \log\frac{\cos(A' - \omega)}{-\cos(A' + \omega)}.$$

Hier ist aber $\cos(A' + \omega)$ negativ, weil $A' > \frac{1}{2}\pi - \omega$ und also $A' + \omega > \frac{1}{2}\pi$ ist. Im Texte ist das Minuszeichen vor $\cos(A' + \omega)$ weggelassen; man muss daher die auf S. 62, Z. 3—5 gemachte Bemerkung auch auf die vor (85) vorhergehende Gleichung beziehen.

S. 62, Z. 7 (55, Z. 2 v. u.). Auch hier steht im K. B. rechts $\frac{1}{2}$ statt 2. Man hat sich wiederum die Zahl, von der der Logarithmus genommen wird, stets positiv gewählt zu denken.

S. 62, Z. 11—7 v. u. (56, Z. 9—13). In Fig. 43′ ist der Grundkreis des Kegels dargestellt; die Axe steht in O auf der Kreisebene senkrecht. Denkt man sich durch alle Punkte auf der Begränzung des unendlich kleinen Flächenraums $LMNP$ Parallele zur Axe gezogen, so erhält man ein Raumelement, das nach S. 48, Gl. (51) gleich $-\frac{1}{2}y\,.\,dX$ ist. Den Rauminhalt des ganzen Kegels erhält man, wenn man nach X von $\frac{1}{2}\pi$ bis R integrirt und dann mit 4 multiplicirt.

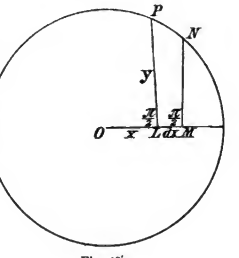


Fig. 43′.

S. 62, Z. 6 v. u.—63, Z. 5 (56, Z. 13 bis 5 v. u.). Aus $\sin X\,.\,\sin Y = \sin R$ folgt nach S. 243, (I):

$$e^{2y} - 2\frac{\sin X}{\sin R}e^y + 1 = 0$$

und andrerseits:

$$dX = -\frac{\sin R\,.\,\cot Y\,.\,dY}{\sqrt{\sin^2 Y - \sin^2 R}}.$$

Die im Texte erwähnte partielle Integration ergiebt:

$$-\pi \, . \log \sin R = \frac{\pi}{2} \log \frac{1+\cos R}{1-\cos R} - \int\limits_R^{\frac{\pi}{2}} X \, . \, dX \, . \frac{2\cos X}{\sqrt{\sin^2 X - \sin^2 R}} .$$

s. S. 451

Von Legendres Exercices de Calcul Intégral ist Band I in Paris 1811 erschienen. Ein besonderes Bändchen von 50 S. 4° trägt die Bezeichnung: „Exercices de Calcul Intégral. Supplément à la première partie", ohne Jahreszahl und Erscheinungsort. Die Worte „première partie" beziehen sich wohl darauf, dass das Werk in „parties" eingetheilt ist; Band I enthält deren drei. Auf S. 35—50 des Supplément wird eine Table générale des formules gegeben, in der die beiden hier von Lobatschefskij abgeleiteten Integrale vorkommen, das eine auf S. 43, Z. 14 in der Gestalt:

$$\int\limits_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \, . \, d\omega \, . \cos\omega}{\sqrt{\sin^2\omega - \sin^2\alpha}} = \tfrac{1}{2}\pi \, . \log\left(1+\cos\alpha\right),$$

das andre auf S. 46, Z. 2 in der Gestalt:

$$\int\limits_0^\beta \frac{\Omega \, . \, d\omega \, . \sin\omega}{\cos\omega \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\omega}} = \frac{\pi}{2\cos\beta} \cdot \log\frac{1}{\cos\beta},$$

wo Ω die Bedeutung:

$$\Omega = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+\sin\omega}{1-\sin\omega}$$

hat. Im ersten Falle ist also: $X = \omega$, $R = \alpha$, im zweiten:

$$Y = \tfrac{1}{2}\pi - \omega, \quad R = \tfrac{1}{2}\pi - \beta.$$

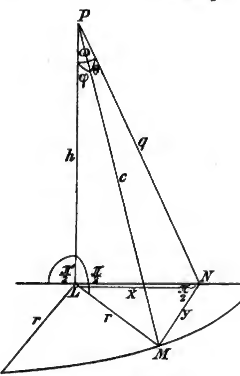


Fig. 44'.

S. 63, Z. 7—16 (56, Z. 4 v. u.—57, Z. 3). In Fig. 44' ist eine solche Pyramide dargestellt. Man hat sich die Spitze P dieser Pyramide $LMNP$ als Anfangspunkt der Polarkoordinaten c, ω, θ zu denken und die Ebene, in der h und x liegen, als die Anfangsebene, so dass also q die Projektion des Radiusvektors c ist.

S. 63, Z. 17f. (57, Z. 4f.) Es ist

$$\int\limits_0^c dc\,(e^c - e^{-c})^2 = \tfrac{1}{2}(e^{2c} - e^{-2c} - 4c)$$

$$= \frac{e^c - e^{-c}}{e^c + e^{-c}} \cdot \frac{(e^c + e^{-c})^2}{2} - \log\cot^2 \tfrac{1}{2} C.$$

S. 63, Z. 13—10 v. u. (57, Z. 6—9). Das Dreieck MNP ist bei N rechtwinklig, da NM auf der Ebene NLP senkrecht steht. Nach S. 20, Gl. 14 III

ist daher: $\cos Q = \cos C \,.\, \cos \theta$ und somit, wenn man sich q konstant denkt:

$$dc = \frac{\operatorname{tg}\theta \,.\, \cos C \,.\, d\theta}{\sin^2 C}.$$

Berücksichtigt man nun, dass $\log \cot \frac{1}{2} C = c$ ist, und schreibt demgemäss $4 d^2 P$ in der Form:

$$4 d^2 P = d\omega \,.\, d\theta \,.\, \cos\theta \left\{ \frac{2 \cos C}{\sin^2 C} - 2c \right\},$$

so ergiebt die Integration nach θ:

$$4 dP = d\omega \int_0^\theta \frac{2 \cos\theta \,.\, \cos C \,.\, d\theta}{\sin^2 C} - d\omega \,.\, 2c \,.\, \sin\theta + d\omega \int_0^\theta 2 \sin\theta \,.\, dc$$

$$= d\omega \int_0^\theta \frac{2 \cos C \,.\, d\theta}{\cos\theta \,.\, \sin^2 C} - d\omega \,.\, 2c \,.\, \sin\theta.$$

Nach S. 20, Gl. 14 V, I ist aber:

$$\operatorname{tg}\theta = \cos Y \,.\, \operatorname{tg} Q, \quad \sin C = \sin Q \,.\, \sin Y,$$

mithin bei konstantem q:

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \sin^2 Y \,.\, \operatorname{tg} Q \,.\, dy = \frac{\sin^2 C \,.\, dy}{\sin Q \,.\, \cos Q},$$

oder wegen: $\cos Q = \cos C \,.\, \cos\theta$:

$$\frac{\cos C \,.\, d\theta}{\cos\theta \sin^2 C} = \frac{dy}{\sin Q}.$$

S. 63, Z. 9—5 v. u. (57, Z. 10—15). Nach S. 20, Gl. 14 II ist: $\operatorname{tg} C = \operatorname{tg} Y \,.\, \sin\theta$. Verbindet man damit die Gleichungen:

$$\sin C = \sin Q \,.\, \sin Y, \quad \sin Q = \sin H \,.\, \sin X,$$

so kommt:

$$\sin\theta = \frac{\cos Y \,.\, \sin Q}{\cos C} = \frac{\sin X \,.\, \cos Y \,.\, \sin H}{\cos C}.$$

Ferner ergiebt sich aus: $\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg} H \,.\, \cos X$, wenn man h als konstant betrachtet:

$$d\omega = -\cos^2\omega \,.\, \operatorname{tg} H \,.\, \sin X \,.\, dX$$
$$= -\frac{\operatorname{tg} H \,.\, \sin X \,.\, dX}{1 + \operatorname{tg}^2 H \,.\, \cos^2 X}$$
$$= -\frac{\sin H \,.\, \cos H \,.\, \sin X \,.\, dX}{1 - \sin^2 H \,.\, \sin^2 X}$$

und damit sofort die Gleichung (87), wenn man noch: $\sin Q = \sin H \sin X$ und den vorhin gefundenen Werth von $\sin\theta$ berücksichtigt.

In der Gleichung (87) ist nur H konstant, und man hat sich C als Funktion von X und Y zu denken.

S. 64, Z. 8 (57, Z. 1 v. u.). Der K. B. hat $\sin A$ statt $\sin R$. — Wegen $dX = -\sin X \,.\, dx$ und: $\sin R = \sin X \,.\, \sin Y$ ist hier:

$$\int_R^{\frac{\pi}{2}} \cos Y \,.\, dX = \sin R \,.\, \int_0^r \cot Y \,.\, dx,$$

wo rechts der Faktor von $\sin R$ nach S. 37, Z. 3 v. u. den Inhalt des Viertelkreises vom Halbmesser r darstellt und also nach S. 38, Z. 13—11 v. u. angegeben werden kann.

S. 64, Z. 9—11 (58, Z. 1 f.). Um den ganzen Kegel, dessen Rauminhalt P' sei, zu erhalten, muss man $4\,dP$ entweder nach X von $\frac{1}{2}\pi$ bis R oder nach Y von R bis $\frac{1}{2}\pi$ integriren und dabei: $\sin R = \sin X \,.\, \sin Y$ annehmen. Andrerseits ist nach S. 49, Gl. (55):

$$P' = \pi (c \cos \varphi - h),$$

wo h, c, φ konstant sind und φ der Werth ist, den der frühere Winkel ω für $x = r$ annimmt; es ist also:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} H \,.\, \cos R, \quad \sin H \,.\, \sin R = \sin C,$$

$$\cos \varphi = \frac{\cos H}{\sqrt{1 - \sin^2 H \sin^2 R}} = \frac{\cos H}{\cos C},$$

das heisst:

$$\tfrac{1}{2} P' = \frac{\pi}{2}\left(c \frac{\cos H}{\cos C} - h\right).$$

Die besprochene Integration liefert wegen:

$$dX = -\frac{\sin R \,.\, \cot Y \,.\, dY}{\sqrt{\sin^2 Y - \sin^2 R}}$$

$$\frac{1}{1 - \sin^2 H \,.\, \sin^2 X} = \frac{1}{1 - \sin^2 Q} = \frac{\sin^2 Y}{\sin^2 Y - \sin^2 C}$$

nach (87) den Ausdruck:

$$\tfrac{1}{2} P' = \cos H \,.\, \sin R \,.\, J + \frac{c \,.\, \sin^2 H \,.\, \cos H}{\cos C} \int_{\frac{\pi}{2}}^{R} \frac{\cos Y \,.\, \sin^2 X \,.\, dX}{1 - \sin^2 H \,.\, \sin^2 X},$$

wo J das Integral auf der linken Seite der Gleichung (88) bezeichnet. Nun ist:

$$\frac{\sin^2 H \,.\, \cos Y \,.\, \sin^2 X \,.\, dX}{1 - \sin^2 H \,.\, \sin^2 X} = -\cos Y \,.\, dX + \frac{\cos Y \,.\, dX}{1 - \sin^2 X \,.\, \sin^2 H},$$

$$\frac{\cos Y \;\, dX}{1 - \sin^2 X \,.\, \sin^2 H} = -\frac{\sin R \,.\, \cos^2 Y \,.\, \sin Y \,.\, dY}{(\cos^2 C - \cos^2 Y)\sqrt{\cos^2 R - \cos^2 Y}}$$

$$= \frac{\sin R \,.\, \sin Y\, dY}{\sqrt{\cos^2 R - \cos^2 Y}} - \frac{\sin R \,.\, \cos^2 C \,.\, \sin Y \,.\, dY}{(\cos^2 C - \cos^2 Y)\sqrt{\cos^2 R - \cos^2 Y}},$$

was nach Y von R bis $\frac{1}{2}\pi$ zu integriren ist. Der erste Theil liefert bei der Integration: $\frac{1}{2}\pi \,.\, \sin R$; der zweite aber nimmt bei der Substitution:

$$\cos Y = \frac{\cos R \,.\, v}{\sqrt{1 + v^2}}$$

$$\cos^2 C - \cos^2 Y = \frac{\cos^2 C + (\sin^2 R - \sin^2 C)\, v^2}{1 + v^2}$$

$$= \frac{\cos^2 C + \sin^2 R \,.\, \cos^2 H \,.\, v^2}{1 + v^2}$$

die Gestalt an:

$$\frac{\cos C}{\cos H} \cdot \frac{\sin R \,.\, \cos H \,.\, dv}{\cos C\left(1 + \frac{\sin^2 R \,.\, \cos^2 H}{\cos^2 C} v^2\right)},$$

er liefert also bei der Integration von $v = \infty$ bis $v = 0$ den Beitrag:

$$-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos C}{\cos H}.$$

Demnach wird:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2} P' &= \cos H \,.\, \sin R \,.\, J + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c \,.\, \cos H}{\cos C}\left\{1 - \sin R + \sin R - \frac{\cos C}{\cos H}\right\} \\ &= \frac{\pi}{2}\left\{c \frac{\cos H}{\cos C} - h\right\},\end{aligned}$$

oder:

$$\cos H \,.\, \sin R \,.\, J = \frac{\pi}{2}(c - h),$$

was eben die Gleichung (88) ist.

Im K. B. fehlt die Gleichungsnummer (88).

S. 64, Z. 11—13 (58, Z. 3—5). In dem auf S. 302 näher bezeichneten „Supplément" zu seinen Exercices de Calcul Intégral betrachtet Legendre unter andern auch die folgenden beiden Arten von Integralen:

$$\text{(XX)} \qquad \int_\alpha^\beta \frac{\omega \,.\, d\omega}{M \,.\, N} \,.\, \sin^\lambda \omega \,.\, \cos^\mu \omega,$$

$$\text{(XXI)} \qquad \int_\alpha^\beta \frac{\Omega \,.\, d\omega}{M \,.\, N} \cdot \sin^\lambda \omega \,.\, \cos^\mu \omega,$$

wo $\alpha < \beta$ ist, λ und μ positive oder negative ganze Zahlen bedeuten und unter M, N, Ω die Ausdrücke:

$$M = \sqrt{\sin^2 \omega - \sin^2 \alpha}, \quad N = \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \omega}$$

$$\Omega = \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \omega}{1 - \sin \omega} = \log \cot\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\omega\right)$$

verstanden werden. Insbesondere zeigt er, auf Grund der Betrachtung gewisser Doppelintegrale, dass die beiden Integrale:

$$\int_\alpha^\beta \omega \,.\, d\omega \cdot \frac{N}{M}, \qquad \int_\alpha^\beta \frac{\Omega \,.\, d\omega}{\cos \omega} \cdot \frac{M}{N}$$

durch elliptische Integrale und durch Logarithmen ausdrückbar sind; setzt man bei den betreffenden Formeln im ersten Falle $\beta = \frac{1}{2}\pi$, im zweiten $\alpha = 0$, so fallen die elliptischen Integrale weg und man erhält die auf S. 302 angegebenen Ausdrücke. s. S. 451

Lobatschefskij meint nun offenbar, dass aus der Gleichung (88) alle die Integrale folgen, die sich bei Legendre als besondere Fälle gewisser durch elliptische Integrale und durch Logarithmen ausdrückbarer Integrale ergeben, wenn man die betreffenden Integrale so specialisirt, dass die in ihrem Ausdrucke vorkommenden elliptischen Integrale verschwinden.

In der That, da nach S. 304, Z. 12 die Gleichung: $\sin C = \sin H . \sin R$ besteht und da aus dieser folgt:

$$\cot \tfrac{1}{2} C . \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} H = \frac{1 + \sqrt{1 - \sin^2 H . \sin^2 R}}{\sin R (1 + \sqrt{1 - \sin^2 H})},$$

so kann man die beiden Seiten der Gleichung (88) nach Potenzen von $\sin H$ entwickeln. Indem man dann die Koefficienten der Potenzen von $\sin H$ auf beiden Seiten vergleicht, erhält man unter den Integralen von der Form (XXI), bei denen $\alpha = 0$ ist, eine unendliche Reihe von solchen, die in endlicher geschlossener Form durch Logarithmen ausdrückbar sind; man braucht zu diesem Zwecke nur $X = \frac{1}{2}\pi - \omega$, $R = \frac{1}{2}\pi - \beta$ zu setzen. Insbesondere erhält man aus (88) für $H = 0$ das Integral auf S. 63, Z. 1 wieder.

Wie man von der Gleichung (88) ausgehend auch zu gewissen Integralen von der Form (XX) gelangen kann, das zeigt Lobatschefskij in dem hier weggelassenen Abschnitte seiner Abhandlung, den er hinter § 49 vor dem „Schlusse" eingeschaltet hat. Er kommt da (K. B. 1830, Theil 28, in dem Hefte für Juli und August, S. 629ff., G. A. I, S. 65) auf das Integral (88) zurück, das er nunmehr so schreibt:

$$(102) \qquad \int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi . \sin\xi . \cos\xi . \log\cot\frac{1}{2}\xi}{(\sin^2\xi - \sin^2 a)\sqrt{\sin^2\xi - \sin^2 b}} = \frac{\pi \log(\cot\frac{1}{2}a . \operatorname{tg}\frac{1}{2}c)}{2\sin b . \cos c},$$

unter der Voraussetzung:

$$\sin a = \sin b . \sin c.$$

Setzt man:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{\sin^2\xi - \sin^2 b}}{\sin b . \cos c}, \quad \sin\gamma = \frac{\cos b}{\cos a},$$

wo γ der Werth von φ ist, der dem Werthe: $\xi = \frac{1}{2}\pi$ entspricht, so ergiebt sich:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\cos b}{\sin b . \cos c}, \quad \cos^2 a = \frac{\cos^2 c}{1 - \sin^2 c . \sin^2\gamma}$$

$$\sin\xi . \cos\xi . d\xi = \frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} d\varphi . \sin^2 b . \cos^2 c$$

$$\sqrt{\sin^2\xi - \sin^2 b} = \sin b . \cos c . \operatorname{tg}\varphi$$

$$\sin^2\xi - \sin^2 a = \frac{\sin^2 b . \cos^2 c}{\cos^2\varphi}$$

$$\cos\xi = \frac{\cos b}{\cos\varphi . \sin\gamma}\sqrt{\sin^2\gamma - \sin^2\varphi}$$

und das Integral (102) bekommt die Gestalt:

$$\frac{1}{\cos c . \sin b}\int_0^\gamma d\varphi . \log\cot\tfrac{1}{2}\xi.$$

Durch partielle Integration erhält man hieraus:

$$\frac{1}{\cos c . \sin b}\int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi . d\xi}{\sin\xi} = \frac{\cos c . \sin\gamma}{\sin b . \cos b}\int_0^\gamma \frac{\varphi . \sin\varphi . d\varphi}{(1 - \sin^2 c . \sin^2\varphi)\sqrt{\sin^2\gamma - \sin^2\varphi}},$$

also:

$$(103)\quad \int_0^{\gamma} \frac{\varphi \, . \, d\varphi \, . \sin\varphi}{(1 - \sin^2 c \, . \sin^2\varphi)\sqrt{\sin^2\gamma - \sin^2\varphi}} = \frac{\pi \, . \log\left\{\frac{\cos c + \sqrt{1 - \sin^2\gamma \, . \sin^2 c}}{2\cos\gamma \, . \cos^2\frac{1}{2}c}\right\}}{2\cos c \, . \sqrt{1 - \sin^2\gamma \, . \sin^2 c}}.$$

Entwickelt man hier beide Seiten nach Potenzen von $\sin^2 c$, so erhält man durch Vergleichung der Koefficienten eine unendliche Reihe von Integralen von der Form (XX), die in endlicher geschlossener Form ausdrückbar sind, aber allerdings nur solche, bei denen α den Werth Null hat. Setzt man insbesondere $c = 0$, so bekommt man:

$$\int_0^{\gamma} \frac{\varphi \, . \, d\varphi \, . \sin\varphi}{\sqrt{\sin^2\gamma - \sin^2\varphi}} = -\frac{\pi}{2} \cdot \log\cos\gamma$$

und durch die Substitution: $\varphi = \frac{1}{2}\pi - X$, $\gamma = \frac{1}{2}\pi - R$ gelangt man zu dem Integrale S. 63, Z. 3.

Erwähnt sei noch, dass nach einer Bemerkung Lobatschefskijs das Integral (88) oder (102) durch Betrachtung eines Doppelintegrals abgeleitet werden kann, das den von Legendre benutzten sehr ähnlich ist, es lautet:

$$\int\int \frac{dp \, . \, d\varphi \, . \sin^2\varphi}{(1 - p^2 \, . \sin^2\varphi)(1 - n^2 \, . \sin^2\varphi)}$$

von $p = 0$ an und von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; man hat die Integration in der einen und in der andern Reihenfolge auszuführen und nach der Integration zu setzen:

$$\sin\varphi = \frac{\cos\xi}{\cos b}; \quad p = \cos b; \quad n = \frac{\cos b}{\cos a}.$$

In Gleichung (103) hat der K. B. im Nenner des Logarithmus $\cos\alpha$ statt: $\cos\gamma$.

S. 64, Z. 17—7 v. u. (58, Z. 6 bis 13). Nach S. 20, Gl. 141 ist (s. Fig. 45′), wenn man $NP = u$ setzt und U für $F(u)$ schreibt:

$$\sin X \, . \sin H = \sin U,$$
$$\sin Y \, . \sin U = \sin C,$$

also:

$$\sin C = \sin H \, . \sin X \, . \sin Y$$

und wegen: $\sin X \, . \cos Y = \cos A$:

$$\sin C = \sin H \, . \cos A \, . \operatorname{tg} Y.$$

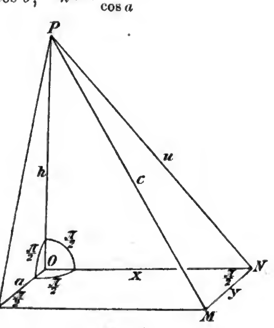


Fig. 45′.

Ferner wird:

$$\sin^2 X = \frac{\cos^2 A}{\cos^2 Y} = \frac{\sin^2 C + \sin^2 H \, . \cos^2 A}{\sin^2 H},$$

$$\cos^2 X = \frac{\sin^2 H \sin^2 A - \sin^2 C}{\sin^2 H},$$

demnach:

$$\frac{c \,.\, \cos Y \,.\, \sin^2 X \,.\, dX}{\cos C(1 - \sin^2 H \sin^2 X)} = \frac{c \,.\, \cos A \,.\, \sin X \,.\, dX}{\cos C(\cos^2 C - \cos^2 A \,.\, \sin^2 H)}$$

und, um noch X durch C auszudrücken:

$$\sin X \,.\, dX = \frac{\sin C \,.\, \cos C \,.\, dC}{\cos X \,.\, \sin^2 H}$$
$$= \frac{\sin C \,.\, \cos C \,.\, dC}{\sin H \sqrt{\sin^2 H \,.\, \sin^2 A - \sin^2 C}}.$$

Zu integriren ist nach X von $\frac{1}{2}\pi$ bis X, während gleichzeitig Y von A bis Y geht; man erhält daher für die Integration nach C die im Texte angegebenen Gränzen.

Der andre Theil der Formel (89) ergiebt sich, wenn man X durch Y ausdrückt. Man hat zu diesem Zwecke:

$$dX = \frac{\cos A \,.\, \operatorname{tg} Y \,.\, dY}{\sqrt{\cos^2 Y - \cos^2 A}}$$
$$\frac{1}{1 - \sin^2 H \,.\, \sin^2 X} = \frac{\cos^2 Y}{\cos^2 Y - \sin^2 H \,.\, \cos^2 A}$$

zu setzen. Bei Gl. (89) hat der K. B. als Faktor vor dem zweiten Integrale: $-\cos H \,.\, \sin^2 H$ statt: $+\cos H \,.\, \sin H \,.\, \cos A$ und in dem Nenner unter dem zweiten Integrale fehlt der Wurzelausdruck.

S. 65, Z. 14—17 (67, Z. 11—13). In der That, ersetzt man a, b, c durch die im Texte angegebenen Werthe, so erhält man (vgl. S. 243, (I)):

$$\sin F\left(a\sqrt{-1}\right) = \frac{1}{\cos a}, \quad \cos F\left(a\sqrt{-1}\right) = \sqrt{-1} \operatorname{tg} a$$
$$\operatorname{tg} F\left(a\sqrt{-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{-1} \sin a},$$

und die Gleichungen (17), S. 21 verwandeln sich der Reihe nach in die Gleichungen 16II, I, III, IV.

S. 66, Z. 5—13 (67, Z. 6—1 v. u.). In der Mécanique céleste, Ière partie, livre I, Nr. 5 geht Laplace auf die Möglichkeit ein, dass die Geschwindigkeit, die durch eine momentan wirkende Kraft hervorgerufen wird, eine beliebige Funktion dieser Kraft sein könne, und er beweist, dass die Annahme einer solchen Möglichkeit durch die Erfahrung nicht bestätigt wird.

Unter v versteht er die Geschwindigkeit der Erde, die allen Körpern an der Erdoberfläche gemeinsam ist, f nennt er die Kraft, von der einer dieser Körper, M, vermöge dieser Geschwindigkeit getrieben wird, und endlich setzt er $v = f \,.\, \varphi(f)$, wo die Funktion $\varphi(f)$ durch die Erfahrung zu bestimmen ist. Ferner denkt er sich M durch eine andre Kraft f' bewegt und nennt F die aus f und f' resultirende Kraft, so dass $F \,.\, \varphi(F) = U$ die der Kraft F entsprechende Geschwindigkeit ist. Nach dem Parallelogramme der Kräfte werden f und f' parallel drei zu einander senkrechten Axen in die Komponenten a, b, c und a', b', c' zerlegt, und es ist also:

$$F = \sqrt{(a + a')^2 + (b + b')^2 + (c + c')^2},$$

und:

$$\frac{(a + a')U}{F} - \frac{v \,.\, a}{f} = (a + a')\,\varphi(F) - \frac{v \,.\, a}{f}$$

ist die Komponente der relativen Geschwindigkeit parallel der ersten Axe. Da man f' im Vergleiche mit f als unendlich klein betrachten muss, so sind auch a', b', c' unendlich klein, und es ergiebt sich:

$$F = f + \frac{aa' + bb' + cc'}{f}, \quad \varphi(F) = \varphi(f) + \frac{aa' + bb' + cc'}{f} \cdot \varphi'(f),$$

überdies wird:

$$(a + a') \cdot \varphi(F) - a \cdot \varphi(f) = a' \cdot \varphi(f) + \frac{a}{f}(aa' + bb' + cc') \cdot \varphi'(f)$$

die relative Geschwindigkeit, die M an der Erdoberfläche parallel der ersten Axe hat. Nimmt man endlich an, dass die Richtung der Kraft f' der ersten Axe parallel ist, so werden b' und c' null, und die Komponenten der relativen Geschwindigkeit von M erhalten die Werthe:

$$a'\left\{\varphi(f) + \frac{a^2}{f}\varphi'(f)\right\}, \quad \frac{a \cdot b}{f} a' \cdot \varphi'(f), \quad \frac{a \cdot c}{f} a' \cdot \varphi'(f).$$

Fallen daher die Richtungen von f und f' nicht zusammen, sind also b und c nicht beide null, so würde, falls $\varphi'(f)$ nicht null und also $\varphi(f)$ nicht konstant wäre, vermöge der Kraft $f' = a'$ eine relative Geschwindigkeit auftreten, deren Richtung zur Richtung der Kraft f' senkrecht stände. Das aber widerspricht der Erfahrung, die gemachte Annahme ist daher unzulässig.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass Lobatschefskij mit den im Texte erwähnten „Veränderungen in der Mechanik" eben das Auftreten einer solchen relativen Geschwindigkeit gemeint hat. Bei der von Laplace gemachten Annahme ist nämlich das Trägheitsgesetz auf die relative Bewegung so gut wie gar nicht mehr anwendbar, während es doch sonst, wenn die Kraft proportional der Geschwindigkeit ist, unter Voraussetzung der Euklidischen Geometrie wenigstens auf den Fall anwendbar bleibt, dass ein im absolut ruhenden Raume gewähltes Koordinatensystem einer Translationsbewegung von konstanter Geschwindigkeit unterworfen wird. Genau ebenso verhält es sich nun in der Lobatschefskijschen Geometrie, auch da verliert das Trägheitsgesetz für die relative Bewegung seine Bedeutung. Man denke sich zum Beispiel in der Lobatschefskijschen Ebene zwei rechtwinklige Koordinatensysteme, ein festes der x, y und ein bewegliches der ξ, η, und das zweite bewege sich so, dass seine ξ-Axe immer mit der x-Axe zusammenfällt, während sein Anfangspunkt $\xi = \eta = 0$ die x-Axe mit konstanter Geschwindigkeit durchläuft. Dann ist augenscheinlich für jeden absolut festen Punkt x, y, dessen y nicht verschwindet, die relative Bahn in Bezug auf das System der ξ, η eine krumme Linie, nämlich die Kurve, deren Punkte ξ, η von der ξ-Axe den Abstand: $\eta = y$ besitzen. Das Trägheitsgesetz gilt demnach in diesem einfachen Falle sogar dann nicht mehr allgemein für die relative Bewegung, wenn man einen in absoluter Ruhe befindlichen Punkt betrachtet, und es bleibt nur für die Punkte einer bestimmten Geraden, nämlich für die der x-Axe in Kraft.

Allerdings darf nicht verschwiegen werden, dass sich gegen die Laplaceschen Betrachtungen zweierlei einwenden lässt. Erstens kann man bei den Bewegungen, die auf der Erdoberfläche relativ zur Erde stattfinden, keineswegs in voller Strenge sagen, dass das Koordinatensystem blos einer Translationsbewegung mit konstanter Geschwindigkeit unterworfen ist.

Zweitens aber benutzt Laplace die Zerlegung einer Kraft nach der Regel des Parallelogramms der Kräfte, die auf die Euklidische Geometrie zugeschnitten ist und für die nichteuklidische augenscheinlich einer Umgestaltung bedarf. Der erste Einwand hat aber hier keine besondere Bedeutung, da die Voraussetzung, die Laplace stillschweigend macht, innerhalb der kurzen Dauer der Versuche sicher mit grosser Annäherung erfüllt ist. Andrerseits ist auch der zweite Einwand nicht von Belang, da auch in der nichteuklidischen Geometrie jede Kraft nach drei paarweise auf einander senkrechten Axen, die durch ihren Angriffspunkt gehen, in drei Komponenten zerlegt werden kann, deren Quadratsumme gleich dem Quadrate der Kraft ist, so dass also die Laplaceschen Formeln für die nichteuklidische Geometrie gültig bleiben.

Ueber die Zerlegung der Kräfte in der nichteuklidischen Geometrie vergleiche man die vortreffliche Darstellung in dem Werke von Jules Andrade, Leçons de mécanique physique, Paris, Société d'éditions scientifiques, 1898, S. 360ff.

Andrade geht von folgenden Voraussetzungen aus: Zwei Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte haben eine nach Grösse und Richtung eindeutig bestimmte Resultante. Kräfte, deren Richtungen in dieselbe Gerade fallen, addiren sich algebraisch. Für die Zusammensetzung zweier und mehrerer Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte gelten die Gesetze der Addition. Endlich: die Resultante ändert sich stetig mit ihren Komponenten und ihre Lage zu diesen Komponenten ist unabhängig von der Lage des ganzen Systems im Raume.

Sind dann X und Y zwei zu einander senkrechte Kräfte, deren Resultante R mit X den Winkel α bildet, so ist $X = R.\varphi(\alpha)$, $Y = R.\varphi(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$, wo die Funktion $\varphi(\alpha)$ gerade und $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\frac{1}{2}\pi) = 0$ ist. Ferner haben zwei Kräfte von der Grösse R, die den Winkel 2α bilden, augenscheinlich eine Resultante $2R.\varphi(\alpha)$, die den Winkel 2α halbirt. Betrachtet man daher vier Kräfte von der Grösse 1, von denen zwei den Winkel 2α bilden, während die andern mit den ersten die Winkelhalbirende gemein haben und den Winkel $2\alpha + 4\beta$ bilden, und setzt man diese vier Kräfte auf zwei verschiedene Arten zu einer Resultante zusammen, so erhält man die schon von Poisson aufgestellte Funktionalgleichung:

$$\varphi(\alpha) + \varphi(\alpha + 2\beta) = 2\varphi(\beta) \cdot \varphi(\alpha + \beta),$$

die also von dem Euklidischen Parallelenaxiome unabhängig ist. Macht man jetzt noch die Voraussetzung, dass $\varphi(\alpha)$ positiv ist, so ergiebt sich: $\varphi(\alpha) = \cos\alpha$, demnach ist in dem vorhin betrachteten Falle: $X = R\cos\alpha$, $Y = R.\sin\alpha$.

Auch sonst enthält das Andradesche Buch interessante Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie.

II. Zu der Abhandlung:

Neue Anfangsgründe der Geometrie.

S. 67, Z. 1 (219, Z. 1). Ueber den Ausdruck „Anfangsgründe" vgl. S. 238, Z. 3—5.

S. 67, Z. 4—1 v. u. (219, Z. 6—3 v. u.). Vgl. S. 238, Z. 6—10.

S. 67, Z. 6, 5 v. u., 68, Z. 1—6 (219, Z. 9—7 v. u., 220, Z. 1—3). Es ist das die Arbeit, die nach S. 237 von uns mit J. G. R. bezeichnet wird und die sich von der im Crelleschen Journale erschienenen J. G. F. nur unwesentlich unterscheidet. Lobatschefskij nimmt darin drei Gleichungen an, die zwischen den Seiten und Winkeln eines rechtwinkligen geradlinigen Dreiecks bestehen sollen, leitet daraus die Gleichungen für die Seiten und Winkel eines beliebigen geradlinigen Dreiecks ab und zeigt dann, dass diese letzteren Gleichungen ein widerspruchsfreies System bilden und eine neue Geometrie, seine imaginäre Geometrie, definiren, aus der die Euklidische Geometrie hervorgeht, wenn man die Dreiecksseiten unendlich klein annimmt.

S. 68, Z. 12—6 v. u. (220, Z. 17—12 v. u.) Die folgenden Mittheilungen über die drei ersten Ausgaben der Eléments de Géométrie von Legendre beruhen theils auf Auszügen, die ich meinem Freunde A. Tresse in Paris verdanke, theils auf den eigenen Aeusserungen Legendres in den „Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle", in den Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France, Bd. XII, Paris 1833, S. 367—410. Durch das Folgende werden zugleich die in der P. Th. 212 f. gemachten Angaben über Legendre vervollständigt und erweitert.

In der ersten, 1794 erschienenen Ausgabe der Eléments gewinnt Legendre den Euklidischen Standpunkt so: Er beweist zunächst, in Proposition XIX, den Satz, dass zwei Gerade, die auf einer dritten senkrecht stehen, niemals zusammentreffen, und stellt dann in Proposition XX den Hülfssatz auf: Steht die Gerade BD auf AB senkrecht und bildet AC mit AB den spitzen Winkel BAC, so schneiden AC und BD einander, wenn man sie genügend verlängert. Um diesen Hülfssatz zu beweisen, denkt er sich von C aus auf AB das Loth CM gefällt und zeigt, dass AM immer grösser wird, je mehr AC wächst; daraus will er dann schliessen, dass es kein letztes Loth CM geben könne und dass also AM schliesslich einmal gleich AB werde, so dass AC und BD einander schneiden Aus dem Hülfssatze ergiebt sich endlich leicht der Satz, dass zwei Gerade ein-

ander stets dann schneiden, wenn sie mit einer dritten Geraden innere Winkel bilden, deren Summe kleiner als zwei Rechte ist.

In den „Notes“ zur ersten Ausgabe bringt er dann einen analytisch-geometrischen Beweis, der in allen folgenden Ausgaben und auch auf S. 372 ff. der Réflexions wiederkehrt und der auf Folgendes hinauskommt: In jedem geradlinigen Dreiecke mit der Seite p und den anliegenden Winkeln A, B ist der dritte Winkel C vollständig bestimmt, also ist: $C = \varphi(A, B, p)$, wo φ eine Funktion bezeichnet. Wählt man nun den rechten Winkel zur Winkeleinheit, so werden A, B, C durch Zahlen zwischen 0 und 2 ausgedrückt, und wenn dann p in der Funktion φ vorkäme, so würde sich p gleich einer Zahl ergeben, was wegen der Willkür der Längeneinheit absurd ist. Demnach ist C schon durch A und B allein bestimmt. Zerlegt man jetzt ein rechtwinkliges Dreieck durch das vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Loth, so erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke, von denen jedes mit dem ursprünglichen einen spitzen Winkel gemein hat und also nach dem eben Bewiesenen auch den zweiten. Hierin liegt, dass in jedem rechtwinkligen und also überhaupt in jedem geradlinigen Dreiecke die Winkelsumme gleich zwei Rechten ist.

cf. Gauss's criticism, in Gauss, Werke VIII (1900), p. 168-9

In der zweiten, 1799 veröffentlichten Ausgabe der Eléments versucht Legendre in Proposition XIX direkt zu beweisen, dass die Winkelsumme

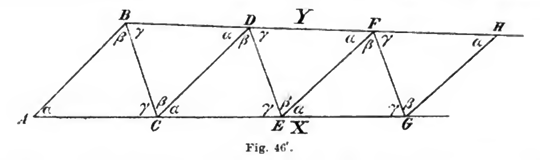


Fig. 46′.

in jedem Dreiecke ABC gleich zwei Rechten ist, und zwar verfährt er zu diesem Zwecke so: In Fig. 46′ mache man $\angle CBD = \angle ACB$ und $BD = CA$, ferner $\angle DCE = \angle BAC$, $CE = AC$ und $DF = CA$, ..., so dass also alle Dreiecke der Figur dem Dreiecke ABC kongruent werden und überdies in jedem der Punkte C, D, E, F, ... drei Winkel zusammenstossen, die den Winkeln α, β, γ des Dreiecks ABC gleich sind. Ist dann $\alpha + \beta + \gamma$ nicht gleich zwei Rechten, so ist $ACEG$ ... keine gerade Linie sondern ein Vieleck, dessen Höhlung sich entweder nach X oder nach Y hin öffnet. Oeffnet sich diese Höhlung zum Beispiel nach X hin, so muss das Vieleck $BDFH$ nothwendig eine ähnliche Krümmung besitzen und daher seine Höhlung auch auf der Seite von X haben; da aber andrerseits die Höhlung von $ACEG$ nach X hin geöffnet ist, so bewirkt derselbe Umstand, der das veranlasst, zugleich, dass die Höhlung von $BDFH$ sich auf der Seite von Y befindet. Demnach kommt man in jedem Falle auf einen Widerspruch und $\alpha + \beta + \gamma$ muss gleich zwei Rechten sein. Auf S. 383 bis 385 der Réflexions wiederholt Legendre diesen Beweis in etwas verbesserter Gestalt.

Noch ist zu bemerken, dass die „Notes“ zur zweiten Ausgabe schon die Beweise enthalten, die Legendre in der dritten Ausgabe dafür giebt, dass die Winkelsumme nicht von zwei Rechten verschieden sein kann.

Dabei fügt Legendre hinzu: „Man könnte beweisen, dass bei jedem Dreiecke das etwaige Deficit der Winkelsumme dem Dreiecksinhalte proportional ist, eine Eigenschaft, die der der sphärischen Dreiecke entspricht."

In der dritten Ausgabe von 1800 endlich beweist Legendre in Proposition XIX vollkommen streng den Hülfssatz: Die Winkelsumme im Dreiecke kann nicht grösser als zwei Rechte sein. Lobatschefskij theilt diesen Beweis in der zweiten Hälfte des § 90 seiner Neuen Anfangsgründe mit, hier S. 161, Z. 5 v. u. ff. In Proposition XX folgt dann der Lehrsatz, dass die Winkelsumme stets gleich zwei Rechten ist. Der Beweis ist folgender: Es sei (Fig. 47′) α der kleinste Winkel des Dreiecks ABC, und es sei, wenn es möglich ist:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R - Z,$$

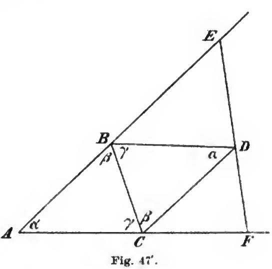


Fig. 47′.

wo Z ein positiver Winkel ist. Man mache das Dreieck BCD dem Dreieck CBA kongruent und ziehe durch D irgend eine Gerade EF, die die verlängerten Schenkel des Winkels α in zwei Punkten E und F trifft. Dass der Winkel α der kleinste Dreieckswinkel sein sollte, ist vorausgesetzt worden, um die Möglichkeit einer solchen Geraden durch D einleuchtender (plus sensible) zu machen. Die Winkelsumme des Dreiecks AEF ist nun augenscheinlich jedenfalls um $2Z$ kleiner als $2R$, wendet man daher dieselbe Konstruktion auf das Dreieck AEF an und fährt man so fort, so kommt man zu Dreiecken, deren Winkelsumme höchstens $2R - 4Z$, $2R - 8Z, \ldots$ ist und schliesslich zu einem Dreiecke mit negativer Winkelsumme, was widersinnig ist. Diesem Beweise gelten die Bemerkungen Lobatschefskijs S. 68, Z. 9—6 v. u. Legendre hat übrigens später selbst bemerkt, dass dieser Beweis auf dem „Postulatum" beruht, dass durch jeden Punkt in der Oeffnung eines Winkels Gerade gezogen werden können, die beide Schenkel des Winkels schneiden. In der Note II der zwölften Ausgabe der Eléments, Paris 1823, glaubte er auch dieses, schon 1791 von Lorenz (s. P. Th. S. 213) ausgesprochene „Postulatum" beweisen zu können, doch kann dieser neue Beweis ebensowenig befriedigen als der ursprüngliche.

S. 69, Z. 2—5 (220, Z. 9—6 v. u.). Dieser Beweis steht in den Réflexions auf S. 375—377.

S. 69, Z. 17 (221, Z. 8). Der Originaldruck (O.) in den K. G. S. hat: $B'C' = AB$, statt: $B'C' = AC$.

S. 70, Z. 3—17 (221, Z. 10 v. u.—222, Z. 3). Da c die grösste Seite des Dreiecks ABC ist, so ist von den drei Winkeln A, B und C höchstens der letzte $> \frac{1}{2}\pi$, aber A sicher spitz und wegen $A = A' + B'$ auch A' und B' spitz, das heisst, die Höhe $C'D = h$ (Fig. 48′) fällt nothwendig in das Innere des Dreiecks $AC'B'$. Nach S. 21, Gl. 17 I ist nun in den Dreiecken ABC und $AB'C'$:

$$\operatorname{tg} \Pi(b) . \sin B = \operatorname{tg} \Pi(c) . \sin C$$
$$\operatorname{tg} \Pi(b) . \sin A' = \operatorname{tg} \Pi(c) . \sin B',$$

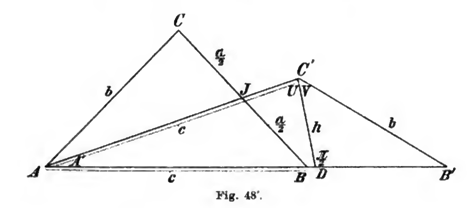


Fig. 48'.

wo wir $\Pi(b)$ statt $F(b)$ geschrieben haben, also:

$$\sin C . \sin A' = \sin B . \sin B'$$

und aus:

$$\sin (A - A') = \sin B', \quad \sin (A - B') = \sin A'$$

ergiebt sich:

$$\cot A' - \cot A = \frac{\sin B'}{\sin A . \sin A'} = \frac{\sin C}{\sin A . \sin B}$$

$$\cot B' - \cot A = \frac{\sin A'}{\sin A . \sin B'} = \frac{\sin B}{\sin A . \sin C},$$

wie im Texte. Ferner ist:

$$\cot A = \cot \tfrac{1}{2} A - \frac{1}{\sin A},$$

somit:

$$\cot A' - \cot \tfrac{1}{2} A = \frac{1}{\sin A} \left(\frac{\sin C}{\sin B} - 1\right),$$

da aber $C \geqq B$ und $< \pi - B$ ist, so ist $\sin C \geqq \sin B$, folglich $\cot A' \geqq \cot \frac{1}{2} A$, und da A und A' beide spitz sind, $A' \leqq \frac{1}{2} A$. Ebenso ist:

$$\cot B' - \cot \tfrac{1}{2} A = - \frac{1}{\sin A} \left(1 - \frac{\sin B}{\sin C}\right),$$

also: $\cot B' \leqq \cot \frac{1}{2} A$ und $> \cot A$, das heisst: $\frac{1}{2} A \leqq B' < A$.

Zur Berechnung von h erhält man nach S. 20, Gl. 14 VI aus den Dreiecken ADC' und $B'DC'$ die Gleichungen:

$$\sin \Pi(h) . \cos A' = \sin U, \quad \sin \Pi(h) . \cos B' = \sin V,$$

wozu noch: $U + V = C'$ kommt. Demnach wird:

$$\cos C' = \sqrt{(1 - \sin^2 \Pi(h) \cos^2 A')(1 - \sin^2 \Pi(h) \cos^2 B')} - \sin^2 \Pi(h) \cos A' \cos B'$$

und hieraus folgt:

$$\frac{1}{\sin^2 \Pi(h)} - 1 = \frac{\cos^2 A' + \cos^2 B' + \cos^2 C' - 1 + 2 \cos A' \cos B' \cos C'}{\sin^2 C'}$$
$$= \left(\frac{e^h - e^{-h}}{2}\right)^2$$

(vgl. S. 243, (I)), was mit der Formel des Textes übereinstimmt. Im O. fehlen bei dem Ausdrucke für $e^h - e^{-h}$ die Accente an A, B, C.

Die abgeleiteten Formeln gelten natürlich auch für jedes der folgenden Dreiecke, also bekommt man an der Gränze für $A' = B' = 0$ und $C' = S$:

$$e^h - e^{-h} = \frac{4 \cos^2 \frac{1}{2} S}{\sin S} = 2 \cot \tfrac{1}{2} S$$

und, da $e^h > 0$ ist:

$$e^h = \cot \tfrac{1}{4} S.$$

S. 70, Z. 20—13 v. u. (222, Z. 4—9). In den Réflexions sagt Legendre auf S. 390: „En analysant ainsi les trois parties de la démonstration, on trouvera que sa difficulté, si elle existe, peut au moins être fort atténuée", er meint also, die Schwierigkeit könne sehr abgeschwächt werden, was Lobatschefskij durch отклонить, ablenken, beseitigen wiedergiebt. Auf S. 390—397 der Réflexions untersucht Legendre dann, wie sich die Seiten und Winkel der auf einander folgenden Dreiecke durch die Seiten und Winkel des ursprünglichen Dreiecks ausdrücken, aber er setzt dabei die Euklidische Geometrie voraus, so dass also diese Betrachtungen wirklich vollkommen zwecklos sind.

S. 70, Z. 12—1 v. u. (222, Z. 10—18). Es ist das der in der zweiten Ausgabe der Eléments versuchte Beweis, vgl. S. 312.

S. 70, Z. 1 v. u. — 71, Z. 4 (222, Z. 18—21). Zwei solche Linien sind zum Beispiele die beiden Aeste der Kurve, die aus allen Punkten einer Ebene besteht, deren Abstände von einer gegebenen Geraden gleich sind.

S. 71, Z. 5 f. (222, Z. 14, 13 v. u.). Louis Bertrand, geb. 1731, gest. 1812 hat seinen Beweisversuche in dem Werke veröffentlicht: Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, Bd. II, Genf 1774 (vgl. P. Th. 231). Legendre berichtet über diesen Beweisversuche auf S. 397—400 der Réflexions. Der eine Versuch beruht auf der Einführung der Zweiecke (biangles), das heisst, der Flächenräume, die begränzt werden von zwei unendlichen Geraden AB, CD und einer endlichen Geraden AC, wobei $\angle BAC + \angle ACD = 2R$ ist. Da jeder ebene Winkel in unendlich viele solcher biangles zerlegt werden kann, so ist nach Bertrand der von den Schenkeln des Winkels begränzte Flächenraum unendlich gross von zweiter Ordnung, ein Zweieck dagegen blos unendlich gross von der ersten Ordnung. Denkt man sich nun von A aus eine Gerade AX so gezogen, dass $\angle XAC + \angle ACD < 2R$ wird, so kann der Winkelraum BAX, da er unendlich gross von zweiter Ordnung ist, nicht in dem Zweiecke $BACD$ enthalten sein, das ja blos unendlich gross von erster Ordnung ist, folglich muss AX aus dem Zweiecke $BACD$ heraustreten und CD schneiden. Den zweiten Beweisversuch Bertrands theilt Lobatschefskij selbst gleich nachher mit, S. 73, Z. 17 ff. s. S. 451-3

S. 72, Z. 4 (223, Z. 14). Das O. hat $\pi n a$ statt πn.

S. 72, Z. 7 f. (223, Z. 16 f.). Das O. hat: „Wenn wir jedoch, statt $AB = na$ anzunehmen, $AB = CD = n^2 a$ machen, so ...".

S. 72, Z. 17 f. (223, Z. 9—7 v. u.). Es ist durchaus unklar, wie sich Lobatschefskij den Beweis hierfür im Falle $S > \pi$ gedacht hat. Auf der Kugelfläche, die ja den Fall $S > \pi$ verwirklicht, bekommt im Gegentheil der Quotient $Y : X$ für $n = \infty$ einen endlichen, von a abhängigen

Gränzwerth, und dasselbe gilt natürlich in der Ebene, wenn $S > \pi$ vorausgesetzt wird. Es scheint hieraus hervorzugehen, dass Lobatschefskij den Fall $S > \pi$ keiner eingehenden Untersuchung gewürdigt hat, jedenfalls ist es ihm und ebenso Johann Bolyai entgangen, dass auch dieser Fall zu einer in sich widerspruchsfreien Geometrie der Ebene führt, in der nur die Gerade eine endliche Länge hat. Diese Entdeckung war Riemann vorbehalten (vgl. jedoch P. Th. 252).

S. 72, Z. 12—1 v. u. (223, Z. 6—1 v. u. 224, Z. 1, 2 und 3—1 v. u.). Die Buchstaben r' und x' sind Abkürzungen für $\Pi(r)$ und $\Pi(x)$. Nach S. 38, Z. 16 ist für $na = r$:

$$Y = \frac{1}{\sin \Pi(r)} \cdot \arcsin \frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(r)} - \arcsin \frac{\cot \Pi(a)}{\cot \Pi(r)}$$

$$X = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sin \Pi(r)} - 1\right)$$

woraus sich der im Text angegebene Werth von $Y : X$ ergiebt, wenn man die Gleichungen (I) auf S. 243 berücksichtigt. Setzt man $x = a$, so wird der Winkel ψ in Fig. 49′ durch AFC dargestellt, und in dem rechtwinkligen Dreiecke CAF wird nach S. 20, Gl. 14 II, III, IV:

$$\begin{aligned} \sin \psi \quad &= \operatorname{tg} \Pi(r) \,.\, \cot \Pi(a), \\ \cos \Pi(a) &= \cos \Pi(r) \,.\, \sin \varphi \\ \cot \varphi \quad &= \sin \Pi(r) \,.\, \cot \psi, \end{aligned}$$

also wird wie in der Anmerkung des Textes:

$$Y = \frac{1}{\sin \Pi(r)} \operatorname{arccot} (\sin \Pi(r) \,.\, \cot \psi) - \psi.$$

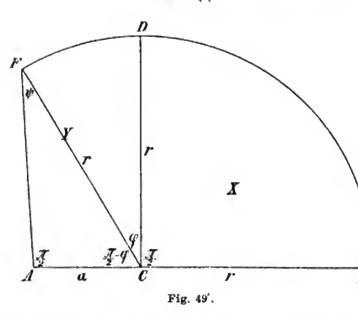


Fig. 49′.

Im O. sind bei der Formel für $Y : X$ die Ausdrücke: $e^{2na} - 1$ und $e^{2na} + 1$ vertauscht und es fehlt der Faktor 4 vor dem zweiten arcsin; ferner steht tang x statt tang x'. Endlich wird im O. wegen der Ableitung der Formel S. 72, Z. 1 v. u. (224, Z. 1 v. u.) auf die „Imaginäre Geometrie, S. 30“ verwiesen, das heisst, auf auf die I. G. R. in den K. G. S. 1835, I. S. 30, G. A. I, S. 85. In der I. G. F. findet man dasselbe, Crelle Bd. 37, S. 307, G. A. II, S. 596.

S. 73, Fig. 3. In der Figur des O. sind D' und D'' verwechselt.

S. 74, Z. 5—7 (225, Z. 4 f.). Die Figur 4 ist so gewählt, dass B'' zwischen B' und B''' fällt; dazu ist nothwendig und hinreichend, dass $CB' = r > AB'$ wird, dass also $\angle ACB' < \angle CAB'$ ist. Man erreicht das jedenfalls immer dann, wenn man den $\angle CAB \gtreqless \frac{1}{2}\pi$ wählt. In der

Figur 4 des O. liegen die Punkte B' und B'' noch etwas weiter aus einander als in Fig. 4 auf S. 73.

S. 74, Fig. 5. Im O. steht B''' statt B', während doch $CB' = r$ ist, nicht aber CB'''; auch ist es schon deshalb angebracht B''' durch B' zu ersetzen, weil dann B'' und B''' auf die Verlängerung von AB' über B' hinaus zu liegen kommen.

S. 75, Z. 1, 3, 8 (225, Z. 5, 3 v. u., 226, Z. 2). Im O. steht überall $\frac{1}{2}$ statt $1 : 2\pi$.

S. 75, Z. 13—20 (226, Z. 6—13). Im O. hat das β überall falsches Vorzeichen; die letzte Gleichung lautet daher: $A + B + C = \pi - \alpha - \beta$, so dass allerdings in dem Bertrandschen Beweise $\alpha = \beta = 0$ vorausgesetzt zu sein scheint. In Wahrheit ist nur $\alpha = \beta$ vorausgesetzt, was freilich schliesslich auch $\alpha = \beta = 0$ nach sich zieht. 4.p.450, l.12–6 fr.

S. 75, Z. 16 v. u.—76, Z. 4 (226, Z. 20—7 v. u.). Auf S. 400—403 der Réflexions sucht Legendre den Bertrandschen Beweis zu vereinfachen, indem er nur Zweiecke (biangles) benutzt. Er zeigt zunächst, dass jedes schiefwinklige Zweieck $CABD$ (Fig. 50′) in ein rechtwinkliges $CGHD$ von demselben Flächeninhalte verwandelt werden kann. Man braucht zu diesem Zwecke nur AB in F zu halbiren und von F aus die Lothe FH und FG auf BD und AC zu fällen; aus der Beziehung: $\angle CAB + \angle ABD = 2R$ folgt dann sofort, dass die Dreiecke FGA und FHB kongruent sind und dass GFH eine gerade Linie ist. Ferner sieht man unmittelbar, dass das rechtwinklige Zweieck $CGHD$ durch die zu HG senkrechte Gerade FE in zwei gleiche Theile zerlegt wird.

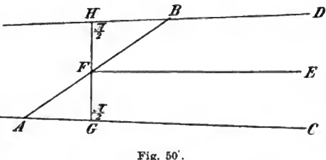


Fig. 50′.

Nunmehr denkt sich Legendre ein rechtwinkliges Zweieck $CABD$ gegeben (Fig. 51′), errichtet auf AC in M die Senkrechte MN, die BD in N trifft, und verbindet N mit der Mitte J von AB. Die Verlängerung von NJ trifft AC in P, und die Dreiecke JAP, JBN werden kongruent. Folglich ist $\angle CPN + \angle PND = 2R$, und das schiefwinklige Zweieck $CPND$ ist dem rechtwinkligen $CABD$ gleich. Macht man endlich $NQ = PN$ und $\angle NQG = \angle NPM$, so ist das schiefwinklige Zweieck $CPQY$ einerseits doppelt so gross als das rechtwinklige $CABD$ und andrerseits gleich dem rechtwinkligen Zweiecke $CMGY$, wo NG das von N aus auf QY gefällte Loth ist, das nach dem Früheren die Verlängerung von MN wird. Nun muss das rechtwinklige

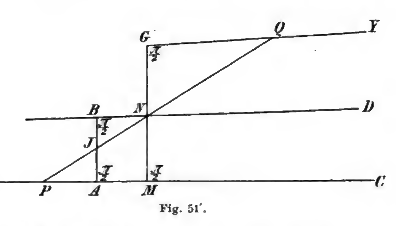


Fig. 51′.

Zweieck $CABD$ gleich der Hälfte des Zweiecks $CMGY$ sein, also gleich dem rechtwinkligen Zweiecke, das MN zur Grundlinie hat. Da aber zwei gleiche rechtwinklige Zweiecke angeblich gleiche Grundlinien haben müssen, so schliesst Legendre, dass $MN = AB$ ist, und daraus folgt dann sofort $\angle BNM = R$, sodass $ABNM$ ein Rechteck ist.

S. 76, Z. 5—7 (226, Z. 6, 5 v. u.). Den ersten Versuch dieser Art hat Wallis (1663) gemacht (vgl. P. Th. S. 19 ff.).

S. 76, Z. 17—15 v. u. (227, Z. 10—12). Vgl. S. 43.

S. 78, Z. 10—3 v. u. (229, Z. 8—14). Vgl. hierzu S. 23 f. und S. 248 ff., sowie die Bemerkungen von Saccheri, P. Th. S. 79 f.

S. 79, Z. 8—10 (229, Z. 14—13 v. u.). Auf S. 372 der Réflexions sagt Legendre: „C'est sans doute à l'imperfection du langage vulgaire et à la difficulté de donner une bonne définition de la ligne droite, qu'il faut attribuer le peu de succès qu'ont obtenu jusqu'ici les géomètres, lorsqu'ils ont voulu déduire ce théorème [über die Winkelsumme im Dreiecke] des seules notions sur l'égalité des triangles que contient le premier livre des Éléments".

S. 81, Z. 1 v. u. — 82, Z. 1 (232, Z. 1, 2). Lobatschefskij hatte schon im Jahre 1825 der physiko-mathematischen Abtheilung der Kasaner Universität ein Lehrbuch der Algebra vorgelegt, das jedoch erst 1833 in Kasan erschien und zwar unter dem Titel: Algebra ili wytschislenije konetschnych (Algebra oder die Rechnung mit endlichen Grössen).

S. 82, Z. 17—23 (232, Z. 14—18). Man findet die betreffende Stelle in der 2. Ausgabe von 1813, II. partie, chap. 6, Nr. 29, in den Oeuvres de Lagrange Bd. IX, S. 241.

S. 85, Z. 9, 8 v. u., 86, Z. 11 (236, Z. 2 v. u., 237, Z. 12). Ueber diese Benennungen vgl. S. 238, Z. 20—22.

S. 86, Fig. 10. Im O. steht hier rechts $A', \ldots F'$ statt $A, \ldots F$.

S. 88, Fig. 14. Im O. fehlen die Buchstaben: a, b, c, f.

S. 88, Z. 11 v. u. (239, Z. 3). Das O. hat: cd, ch statt: ad, ch.

S. 90. In Fig. 18 des O. fehlen die Buchstaben a, b, c, d, β an den betreffenden Stellen, und an der Stelle von f und e stehen: d und c. In Fig. 19 des O. fehlen die Buchstaben α, β, γ, S, S', S'' und an Stelle von a steht α. Die Buchstaben l, m, n sollten wohl ursprünglich die Schnitte bezeichnen, die Lobatschefskij im Texte S, S', S'' genannt hat.

S. 92, Z. 16, 15 v. u. (241, Z. 2, 1 v. u.). Das O. hat: „so muss man die Linie im Vergleich mit der Grösse der Oberfläche".

S. 93 (242). Die in § 12 gegebene Erklärung des Abstandes ist ganz befriedigend, nur hätte Lobatschefskij noch ausdrücklich die Voraussetzung hinzufügen sollen, dass die beiden Punkte A und B ohne Aenderung ihres Abstandes mit einander vertauscht werden können, denn von dieser Voraussetzung macht er nachher in § 16 und besonders von § 20 an stillschweigend Gebrauch.

S. 93—154 (243—291). In diesem ganzen Abschnitte, der die Kapitel II bis V umfasst und in Heft II der K. G. S. von 1836 enthalten ist, haben die Herausgeber der G. A. das Druckfehlerverzeichniss, das Lobatschefskij selbst diesem Hefte beigegeben hat, unberücksichtigt gelassen. Zum Beispiele wird im Texte des O. bei Hinweisen auf die Figuren 46—55 stets eine um 1 kleinere Ziffer angegeben, zuweilen fehlt

auch der Hinweis auf die Figur ganz; alles das ist aber im Druckfehlerverzeichnisse des O. berichtigt. Die Herausgeber der G. A. haben nun die Figur 46 als 45a bezeichnet und dann 47—55 als 46—54. Eine im Texte des O. erwähnte Figur 55, die auf der zugehörigen Tafel fehlt, ist von den Herausgebern der G. A. neu hinzugefügt und mit 55 bezeichnet worden. In der gegenwärtigen Uebersetzung habe ich die von Lobatschefskij beabsichtigte Numerirung der Figuren wieder hergestellt und die eben erwähnte, im O. fehlende Figur mit 55a bezeichnet, s. S. 132.

S. 93—109 (243—255). Dieses ganze Kapitel lässt gar Manches zu wünschen übrig, nicht blos weil die Darstellung mehrfach an Unklarheit leidet, sondern namentlich deswegen, weil im Laufe der Entwickelung stillschweigend verschiedene Voraussetzungen gemacht werden, die bei der Erklärung der Grundbegriffe nicht zum Ausdrucke gebracht worden sind. Allerdings ist es eine der schwierigsten Aufgaben, diese Voraussetzungen in scharfer Fassung und wirklich vollständig anzugeben, und man darf deshalb den Versuch, den Lobatschefskij hier zur Begründung der Geometrie macht, nicht zu streng beurtheilen.

S. 94, Z. 10 v. u. (244, Z. 8). Das O. hat: „mit dem Halbmesser *r*“. In der Figur 21 des O. fehlt der Buchstabe *d*.

S. 95, Z. 5—7 (244, Z. 16 f.). Vermuthlich hat Lobatschefskij das so gemeint: Jede Kugelfläche mit dem Mittelpunkte *d*, die durch einen Punkt im Innern der zu *B* gehörigen Kugel ginge, hätte nothwendig mit der Kugelfläche *B* gewisse Punkte gemein und enthielte daher die ganze Kugelfläche *B*. Demnach lägen überhaupt alle Punkte der zu *B* gehörigen Kugel auf einer Kugelfläche mit dem Mittelpunkte *d*.

S. 95 f. (244 f.). Die in § 19 angegebenen Merkmale zur Unterscheidung zwischen den beiden Seiten der Ebene sind durchaus ungenügend. Es müsste heissen: der Punkt *C* liegt ausserhalb der Ebene, auf der Seite des Poles *A*, wenn er ausserhalb der Kugelfläche liegt, die um *B* als Mittelpunkt mit dem Halbmesser *AC* beschrieben wird; er liegt dann zugleich innerhalb der Kugelfläche, die um *A* als Mittelpunkt mit dem Halbmesser *BC* beschrieben wird. Entsprechend hätte man den Sachverhalt für den Punkt *E* auszudrücken.

S. 97. In Fig. 25 müssen die oberen *G* und *F* durch *G'* und *F'* ersetzt werden. Die Fig. 25 des O. ist unrichtig; an den Stellen von *C*, *C'* und *E*, *E'* stehen die Buchstaben: *F*, *F'* und *C*, *C'*, und der jetzige Durchmesser *FF'* fehlt ganz. Diese Fehler sind schon in den G. A. berichtigt.

S. 98, Z. 16 (246, Z. 2 v. u.). Das O. hat *DED'* statt: *EDE'*.

S. 98, Z. 5 v. u. (247, Z. 14). Der § 23 fehlt im O., obwohl später auf ihn verwiesen wird (s. § 30 und 44). Er muss unter Anderm die Erklärung enthalten haben, dass jeder erzeugende Kreis der Ebene ein sogenannter grösster Kreis ist auf der durch ihn gehenden Kugelfläche, die den Ursprung der erzeugenden Kreise zum Mittelpunkt hat; daran konnte dann die Bemerkung geknüpft werden, dass eine Kugelfläche überhaupt von jeder Ebene durch ihren Mittelpunkt in einem solchen grössten Kreise geschnitten wird. Dadurch wird es auch verständlich, dass Lobatschefskij in § 25 den Ausdruck: grösster Kreis gebraucht, ohne ihn vorher erklärt zu haben.

S. 99, Z. 11 v. u. (247, Z. 2 v. u.). Das O. hat § 20 statt § 22.

S. 100, Z. 13 (248, Z. 15). Das O. hat ABD' statt $AB'D'$.

S. 101. In Fig. 28 des O. steht B' statt E'.

S. 106, Z. 16 (252, Z. 9 v. u.). Das O. hat $F'D'$ statt $F'D$.

S. 106, Z. 12 v. u. (253, Z. 1). Das O. hat § 29 statt § 27.

S. 108. In der Fig. 38 des O. fehlt der Buchstabe F, und der Abstand FB' ist viel grösser als FB.

S. 111, Z. 4 (257, Z. 3). Das O. hat: „die m-mal so gross ist wie b, und auf diese a so oft zu legen“.

S. 111, Z. 25 (257, Z. 18). Wörtlicher wäre: „wenn man m durch n dividirt“.

S. 111, Z. 10 und 5 v. u. (257, Z. 10 und 6 v. u.). Im O. finden sich hier noch die Verweisungen: (Algebra, S. 127) und: (Algebra, S. 132), die sich auf Lobatschefskijs Lehrbuch der Algebra beziehen.

S. 114, Z. 23 (259, Z. 10 v. u.). Im O. steht hier das Zeichen: ∟, das aber von § 48 an durch das Zeichen $\angle$ ersetzt wird.

S. 117, Z. 5 (261, Z. 14 v. u.). Das O. hat: $\angle AaB$ statt: $\angle Aab$.

S. 118, Z. 11 (262, Z. 13, 12 v. u.). Wörtlich übersetzt würde es statt „Aussenwinkel“ heissen: „der äussere Winkel von der Verlängerung her“.

S. 118, Z. 12—9 v. u. (262, Z. 4—1 v. u.). Man muss sich gleichzeitig auch den grössten Kreis, auf dem die dritte Seite liegt, fest denken.

S. 119, Z. 1, 20 (263, Z. 6, 18). Das O. hat § 40 und 46 statt: 41 und 45.

S. 120, Z. 11—17 (264, Z. 14—17). Zu diesem Beweise vgl. P. Th. S. 9, Euklid I, 5.

S. 122, Z. 5—2 v. u. (266, Z. 17 v. u.). Die Worte: „wenn sie von der Mitte . . . den Winkel halbirt“ sind in den G. A. weggelassen.

S. 123, Z. 9 v. u. (267, Z. 4). Das O. hat: § 40 statt: 41.

S. 125, Z. 9 v. u. (268, Z. 16 v. u.). Das O. hat: AB' statt: $A'B$.

S. 127, Z. 10, 15 (269, Z. 7, 4 v. u.). Im O. beide Male § 42 statt 43.

S. 128, Z. 8 (270, Z. 17). Im O. BG statt FG.

S. 129, Z. 20 (271, Z. 17). Im O. § 43 statt 44.

S. 129, Z. 2, 1 v. u. (271, Z. 8 v. u.). Das O. hat: „Punkt B auf C' und C auf B',“ was erst in dem folgenden Falle, wo $\angle B = \angle C$ angenommen wird, am Platze ist.

S. 131, Z. 1 v. u. (273, Z. 13). Deutlicher wäre: Die um einen Punkt als Mittelpunkt mit einem Bogen als Halbmesser auf der Kugelfläche entworfene Linie.

S. 132, Z. 18 v. u. (273, Z. 4, 3 v. u.). Es soll wohl eigentlich „Im geradlinigen Vielecke“ heissen.

S. 132, Fig. 55a. Diese Figur, auf die im O. unter Nr. 55 verwiesen wird, fehlt auf der Figurentafel des O. und ist den G. A. entnommen, wo sie die Nr. 55 trägt, vgl. S. 319, Z. 3 ff.

S. 133, Z. 19 (275, Z. 11). Das O. hat AC statt: BC.

S. 134, Z. 2 (275, Z. 1 v. u.). Das O. hat ECF und EHC statt: ECG und EGC.

S. 134, Z. 7 und 10 (276, Z. 4 und 6). Das O. hat: „das von B aus auf DE gefällte Loth BH“ und: $AFEB$ statt: $AFGB$.

S. 134, Z. 6—1 v. u. (276, Z. 17—20). Der Ort der Spitzen aller flächengleichen sphärischen Dreiecke mit gemeinsamer Grundlinie ist zuerst von Lexell auf analytischem Wege bestimmt und als ein Kreis erkannt worden, s. dessen „Solutio problematis geometrici ex doctrina sphaericorum", Acta Petropolitana Bd. V, Theil I, ad annum 1781, S. 112—127, Petersburg 1784. Euler hat dann die Lexellsche Lösung der Aufgabe vereinfacht in seiner Abhandlung „Variae speculationes super area triangulorum sphaericorum", in conventui exhibita 29. Jan. 1778, erschienen in den Nova Acta Petropolitana, Bd. X, ad annum 1792, S. 47—62, Petersburg 1797, und Legendre hat die Lexellsche Lösung in seine Éléments de Géométrie aufgenommen, in der Note X, 8. Ausgabe, Paris 1809, S. 320 f. Die hier im Texte gegebene rein geometrische Herleitung und Definition des betreffenden Ortes findet sich weder bei Lexell noch bei Legendre, dafür aber genau genommen in der Arbeit Eulers. Euler denkt sich nämlich auf der Kugelfläche zu beiden Seiten eines grössten Kreises, des Aequators, zwei Parallelkreise in gleichen Abständen vom Aequator, und er zeigt, dass alle sphärischen Dreiecke ABC, bei denen A und B feste Punkte des einen Parallelkreises sind und C ein beliebiger Punkt des andern Parallelkreises, gleichen Flächeninhalt haben. Er bemerkt ausserdem auch noch ausdrücklich, dass der Aequator dann immer die beiden Seiten AC und BC des Dreiecks halbirt.

Lobatschefskij muss seine Herleitung des erwähnten Ortes schon vor 1830 gekannt haben, denn im K. B., hier S. 34 f., untersucht er den Flächeninhalt der geradlinigen Dreiecke der nichteuklidischen Geometrie ganz auf dieselbe Weise. Erwähnung verdient es, dass sich auch Gauss mit jenem Orte beschäftigt hat, vgl. seine aus dem Jahre 1842 stammenden Briefe in dem Briefwechsel mit Schumacher, Bd. IV, S. 46 ff.

S. 135, Z. 15—17 (276, Z. 10 v. u.). Die Worte: „und zwar ... AK und FG" entstammen einem Zusatze, den Lobatschefskij selbst im Druckfehlerverzeichnisse des O. (K. G. S., 1836, II) hinzugefügt hat, der aber den Herausgebern der G. A. entgangen ist. Aber auch nach Hinzufügung dieses Zusatzes ist die Darstellung des Textes noch nicht ganz befriedigend, denn es fehlt vor allen Dingen der Nachweis, dass die Verlängerung des Bogens AC den durch B gezogenen Parallelkreis wirklich in einem Punkte F schneidet und dass überdies der Bogen ACF gleich π ist, was doch erforderlich ist, wenn zwischen A und F mehr als ein grösster Kreis möglich sein soll. Auch die Flächengleichheit des Kugelausschnittes $ACFHA$ und des Dreiecks ABC hätte noch etwas näher begründet werden sollen.

Lobatschefskij scheint die beschriebenen Mängel der Darstellung des Textes selbst empfunden zu haben, denn in den G. U. giebt er eine Darstellung desselben Beweises, die von diesen Mängeln frei ist; s. G. U. Nr. 27, S. 28—31, G. A. II, S. 563 f. Wir wollen jetzt die Lücken des Textes ergänzen und folgen dabei im Wesentlichen den G. U.

Die Bogen AC und DE denken wir uns verlängert, bis sie in M zusammentreffen; da $AC < \pi$ ist und also nach § 46 zugleich der Winkel ABC und der Bogen DE beide $< \pi$ sind, so fällt M sicher weder zwischen A und C, noch zwischen D und E. Wir fällen ferner von C aus auf DM das Loth CL, das nach dem Früheren gleich dem Lothe AK ist, ver-

längern sodann LM und CM über M hinaus und machen $MF = CM$, $MG = LM$. Endlich verbinden wir die Mitte H des Bogens KG mit A und F durch die Bogen HA und HF.

Nach der Konstruktion sind die Dreiecke CML und FMG kongruent, es ist also $FG = CL = AK$ und GF senkrecht zu GD, mithin F der Punkt, in dem der Bogen AC den durch B gezogenen Parallelkreis schneidet. Ferner sind die rechtwinkligen Dreiecke AKH und FGH kongruent, da die Katheten des einen den Katheten des andern gleich sind. Folglich ist $AH = HF$ und $\angle KHA = FHG$, worin liegt, dass die beiden Bogen AH und HF einem grössten Kreise angehören.

Da ACF und AHF zwei verschiedene Bogen zwischen den Punkten A und F sind, so sind sie beide gleich π, und $ACFH$ ist also wirklich ein Kugelausschnitt. Diesen Ausschnitt kann man aber als ein Dreieck mit den Ecken A, C, F auffassen; bedenkt man daher, dass $AH = HF$, $CM = MF$ ist und dass die Lothe AK und FG gleich sind, so erkennt man nach dem Früheren sofort, dass der Ausschnitt $ACFH$ dem Dreiecke ABC flächengleich und dass die Summe seiner Winkel bei A und F gleich $S - \pi$ ist.

S. 136, Z. 1—4 (277, Z. 7—10). Auf diesen Mangel, der sich in den Lehrbüchern der sphärischen Trigonometrie von Kästner und Cagnoli findet, hat bereits Mollweide hingewiesen, ohne jedoch ihm abhelfen zu können, s. v. Zachs Monatliche Correspondenz Bd. XXVI, 1812, S. 601. Kurz darauf hat dann Gerling in Zachs Correspondenz Bd. XXVII, 1813, S. 297 und in seinem „Grundriss der ebenen und sphärischen Trigonometrie" Göttingen 1815, S. 61 f. einen rein geometrischen Beweis dafür geliefert, dass zwei symmetrische oder, wie er sie nennt, entgegengesetzte sphärische Dreiecke stets flächengleich sind. Er benutzt dabei den Umstand, dass die den symmetrischen Dreiecken umgeschriebenen Kreise gleich gross sind und dass jedes der Dreiecke mit seinem umgeschriebenen Kreise drei Oberflächensegmente bestimmt, die den beim andern Dreiecke entstehenden Segmenten gleich sind. Die von Lobatschefskij angegebene Zerlegung des sphärischen Dreiecks in drei gleichschenklige Dreiecke, aus denen sich das symmetrische Dreieck zusammensetzen lässt, hat Gerling nicht.

S. 136, Z. 9—27 (277, Z. 14—26). Eine andre Zerlegung des sphärischen Dreiecks in Stücke, aus denen sich das symmetrische zusammensetzen lässt, theilt Lobatschefskij im § 121 der N. A. mit, hier S. 194.

S. 136, Fig. 61. Der Bogen CDA' hat den Wendepunkt bei D schon in der Figur des O.

S. 138, Z. 15 ff. (279, Z. 5 ff.). Es ist merkwürdig, dass sich Lobatschefskij mit der Betrachtung der Vielecke mit zweifacher Begränzung begnügt und nicht auch zu solchen mit mehrfacher Begränzung übergeht. Man sieht daraus, dass ihm der Begriff der mehrfach zusammenhängenden Fläche noch ziemlich fern lag.

S. 139, Z. 4 f. (279, Z. 5, 4 v. u.). Das O. hat: „die Endpunkte der beiden Seiten a und c", während doch c im Allgemeinen keine Seite des Vielecks ist.

S. 139, Z. 15 v. u. (280, Z. 14). Das O. hat: $3n - m = 2m$.

S. 141, Z. 18, 17 v. u. (281, Z. 6 v. u.). Die Worte: „und die auf ihnen errichteten Senkrechten, von denen" sind eingeschaltet, weil sonst

der Text des O. unverständlich ist: Теперь, какія бы то ни были двѣ смѣжныя грани, съ общимъ ли бокомъ или только съ общей точкой, онѣ всегда принадлежатъ къ одному тѣлесному углу, находясь въ одной плоскости съ осью, на которой и могутъ только пересѣкаться.

S. 142, Z. 10 (282, Z. 13). Die Gleichungsnummer (4) fehlt im O., was aber in dem früher erwähnten Druckfehlerverzeichnisse berichtigt ist.

S. 142, Z. 13 f. (283, Z. 15 f.) Der Fall $n = \infty$ führt auch zu regelmässigen Körpern, die aber sonderbarer Weise von Lobatschefskij nirgends erwähnt werden. Ist $n = \infty$, so sind die Axen der körperlichen Winkel des regelmässigen Körpers und die auf den Mitten der Seitenflächen errichteten Senkrechten entweder alle zu einander parallel, oder sie stehen alle auf einer gewissen Ebene, der Mittelebene des Körpers, senkrecht.

Im ersten Falle liegen alle Ecken des Körpers auf einer Gränzkugel oder Gränzfläche (vgl. § 118 der N. A.); die Gleichung (4) bleibt anwendbar, da der Mittelpunkt des Körpers im Unendlichen liegt und der Centriwinkel gleich Null wird. Es ergiebt sich also: $4 - (m-2)(r-2) = 0$, das heisst, entweder: $m = 3$, $r = 6$, oder: $m = r = 4$ oder $m = 6$, $r = 3$. Demnach giebt es nur drei Arten von regelmässigen Körpern, deren Ecken auf einer Gränzkugel liegen, und zwar sind die Seitenflächen dieser Körper entweder regelmässige Dreiecke oder Vierecke oder Sechsecke. Man erhält sie, wenn man sich die Euklidische Ebene in lauter regelmässige Dreiecke, Vierecke oder Sechsecke zerlegt denkt und diese Zerlegung dann nach § 120 f. der N. A. auf eine Gränzkugel überträgt. Von jeder der drei Arten giebt es natürlich unendlich viele verschiedene, weil zu jeder Figur auf einer Gränzkugel unendlich viele ähnliche gefunden werden können.

Im zweiten Falle liegen die Ecken des Körpers alle auf einer Abstandsfläche, die dadurch definirt ist, dass alle ihre Punkte von der Mittelebene des Körpers gleich weit abstehen. Denkt man sich die Ecken des Körpers senkrecht auf die Mittelebene projicirt, so wird die Mittelebene in lauter kongruente regelmässige geradlinige m-Ecke zerlegt, von denen in jeder Ecke r zusammenstossen. Jeder solchen Zerlegung der Mittelebene entspricht auf jeder der unendlich vielen Abstandsflächen, die zu der Mittelebene konstruirt werden können, ein regelmässiger Körper. Da überdies die Winkelsumme im regelmässigen geradlinigen m-Ecke $< (m-2)\pi$ ist, aber dem Werthe $(m-2)\pi$ beliebig nahe kommen kann, wenn nur die Seiten des m-Ecks klein genug gewählt werden, so müssen die positiven ganzen Zahlen m und r nothwendig der Bedingung genügen $r(m-2) > 2m$, sonst sind sie aber ganz beliebig. Hat man m und r so gewählt, dass diese Bedingung erfüllt ist, so ist die Zerlegung der Mittelebene vollkommen bestimmt, denn es giebt dann, wie man sich leicht überzeugt, stets ein aber auch nur ein regelmässiges m-Eck, dessen Winkel $= 2\pi : r$ sind.

S. 142, Z. 20 v. o., 4 v. u., 143, Z. 13 v. u. (282, Z. 9 v. u., 283, Z. 3 v. o., 6 v. u.). Das O. hat кубъ, Kubus, was hier mit Hexaeder wiedergegeben ist, weil „Würfel" zu sehr Euklidische Vorstellungen erweckt. Ebenso hätte schon auf S. 9 Würfel durch Hexaeder ersetzt werden sollen.

S. 143, Z. 9 v. u. — 144, Z. 6 (283, Z. 2 v. u. — 284, Z. 8). Euler hat seinen Polyedersatz in zwei Abhandlungen der Novi commen-

tarii der Petersburger Akademie veröffentlicht und zwar in Bd. IV, ad annum 1752 et 1753, erschienen Petersburg 1758. In der ersten Abhandlung: Elementa doctrinae solidorum, S. 109—140 ist der Satz aufgestellt, aber, wie Euler selbst sagt, nur durch Induktion erschlossen, noch nicht bewiesen. Die zweite Abhandlung dagegen: Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita, S. 140—160, enthält einen Beweis, den Euler bei nochmaliger Untersuchung des Gegenstandes gefunden hatte. Der Legendresche Beweis steht im VII. Buche der Éléments, in der 8. Ausgabe, Paris 1809 auf S. 228 f., Proposition XXV. Cauchys Beweis findet man in der Abhandlung: Recherches sur les polyèdres, Journal de l'École polytechnique Tome IX, Cahier 16, Paris 1813 und zwar im zweiten Theile der Abhandlung, S. 76—86. Ueber die Fälle, in denen der Eulersche Satz nicht mehr gültig ist, hat Lhuilier zu derselben Zeit eine Arbeit veröffentlicht, s. dessen Mémoire sur la polyédrométrie, contenant une démonstration directe du Théorème d'Euler sur les polyèdres, et un examen des diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti. Extrait par Gergonne in Gergonnes Annales III, 1812—13, S. 169—189. Lhuilier unterscheidet drei Arten von Ausnahmen; unter die eine Art fällt die von Lobatschefskij angegebene.

S. 144, Z. 18 (284, Z. 15). Das O. hat § 70 statt 69.

S. 146, Z. 5, 6 (285, Z. 9, 8 v. u.). Das O. hat beide Male 2 statt: — 2.

S. 146, Z. 14—12 v. u. (286, Z. 10 f.). Beim Beweise dieses Satzes setzt Lobatschefskij stillschweigend voraus, dass alle Seiten des betrachteten Dreiecks $< \pi$ sind, obwohl er das in dem Satze selbst nicht ausdrücklich hervorhebt. Wäre nämlich zum Beispiel die Seite $B'C > \pi$, so wäre nach § 46 auch $\angle B'AC$ und Bogen $BC > \pi$, die beiden Bogen $B'C$ und BC hätten also einen zwischen B und C und zwischen B' und C liegenden Punkt gemein, und die Schlüsse des Textes wären nicht mehr anwendbar. Will man die Beschränkung, dass alle Seiten $< \pi$ sein sollen, vermeiden, so muss man den Satz folgendermassen fassen:

Die Summe zweier Winkel eines sphärischen Dreiecks ist stets zugleich mit der Summe der beiden gegenüberliegenden Seiten $> \pi$, $= \pi$, $< \pi$, vorausgesetzt dass die dritte Seite $< \pi$ ist. Ist die dritte Seite $> \pi$, so ist die genannte Winkelsumme $> \pi$, $= \pi$, $< \pi$, jenachdem die Summe der beiden gegenüberliegenden Seiten $< \pi$, $= \pi$, $> \pi$ ist.

In der That, ist in dem Dreiecke BAC die dritte Seite $BC < \pi$ und die beiden andern Seiten auch $< \pi$, so treten die Ueberlegungen des Textes in Kraft; ist aber $BC < \pi$ und eine der andern Seiten BA, $CA > \pi$, so ist nach § 46 einer der beiden Winkel BCA, $CBA > \pi$, also der Satz ebenfalls richtig. Ist endlich die dritte Seite $BC > \pi$, so ersetzt man BC durch eine Ergänzung zu 2π und erhält ein Dreieck, in dem die dritte Seite $< \pi$ ist. Wendet man den ersten Theil des Satzes auf dieses Dreieck an, so erkennt man, dass für das ursprüngliche Dreieck der zweite Theil des Satzes gilt.

S. 146, Z. 4 v. u. (286, Z. 15). Die Verweisung auf § 33 ist unverständlich; vielleicht wollte Lobatschefskij auf den im Drucke aus-

gefallenen § 23 verweisen, in dem er, s. S. 319, den Begriff des grössten Kreises auf einer Kugelfläche erklärt hatte. Vermuthlich hatte er in § 23 auch bemerkt, dass alle grössten Kreise einer Kugelfläche kongruent sind und dass zwei verschiedene grösste Kreise einander stets halbiren.

S. 147, Z. 1 (286, Z. 17). Das O. hat ABC statt ACB.

S. 147, Z. 8 (286, Z. 13 v. u.). In § 68 ist ja bewiesen, dass die Winkelsumme im sphärischen Dreiecke $> \pi$ ist, obwohl das dort nicht ausdrücklich ausgesprochen wird.

S. 147, Z. 12 (286, Z. 10 v. u.). Im O. steht: $ACB + ABC'$.

S. 147, Z. 15—19 (286, Z. 7—5 v. u.). Das O. hat irrthümlich: $> \pi$, $= \pi$, $< \pi$. Selbstverständlich ist der Satz nur richtig, wenn die Seite, durch deren Verlängerung der Aussenwinkel entsteht, $< \pi$ ist. Ist diese Seite $> \pi$, so muss man allerdings $< \pi$, $= \pi$, $> \pi$ durch: $> \pi$, $= \pi$, $< \pi$ ersetzen.

S. 147, Z. 22—28 (286, Z. 4—1 v. u.). Das O. hat: $ABD > ACB$, wenn $AB + AC > \pi$; $ABD < ACB$, wenn $AB + AC < \pi$; $ABD > BAC$, wenn $AC + BC > \pi$; $ABD < BAC$, wenn $AC + BC < \pi$. Zu bemerken ist, dass bei den drei ersten Ungleichheiten vorausgesetzt wird: $BC < \pi$, bei den drei letzten: $BA < \pi$.

S. 147, Z. 11—7 v. u. (287, Z. 1—3). Später in § 79, S. 151, Z. 3—1 v. u. (289, Z. 7—5 v. u.) wird noch der im Texte nicht bewiesene Satz benutzt:

Ist in einem sphärischen Dreiecke eine Seite $< \pi$ und die beiden andern $< \frac{1}{2}\pi$, so sind die Winkel, die den beiden letzten Seiten gegenüberliegen, spitz.

Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir an, in dem Dreiecke ABC (Fig. 52') sei $a < \frac{1}{2}\pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$, $b \leqq a$, aber $c > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$; wäre nämlich auch $c < \frac{1}{2}\pi$, so ergäbe sich die Richtigkeit unsers Satzes schon aus dem im Texte Gesagten. Wir machen $CD = CB$, dann ist nach § 46 $BD < \pi$, ferner ist $BC + DC < \pi$, also (s. § 74) $\angle DBC + \angle BDC < \pi$, oder da $\angle DBC = \angle BDC$ ist (§ 64), $\angle DBC$ und erst recht $\angle ABC$ spitz.

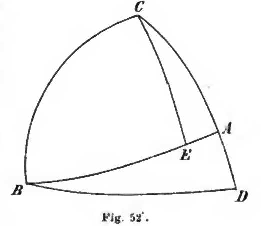


Fig. 52'.

Wir machen ferner $BE = BC$, dann ist nach § 46 wieder $EC < \pi$, ferner ist $EB + CB < \pi$, also nach § 74:

$$\angle CEB + \angle ECB = 2 \angle CEB < \pi,$$

das heisst $\angle CEB$ spitz und CEA stumpf. Endlich ist $BE < \pi$, $\angle EBC + \angle BEC < \pi$, also $BC + EC < \pi$, mithin: $EC < \pi - a$. Daraus aber folgt:

$$EC + AC < \pi - a + b < \pi,$$

wegen $EA < \pi$ ergiebt sich daher nach § 74: $\angle CEA + \angle CAE < \pi$, und da $\angle CEA$ stumpf ist, so ist $\angle CAB$ nothwendig spitz.

S. 148, Z. 14—16 (287, Z. 15 f.). Die Entfernung zwischen dem Fusspunkte des Lothes und dem Scheitel des Winkels ist ja stets $< \pi$.

S. 148, Z. 18—20 (287, Z. 17 f.) Im Beweise dieses Satzes hätte

noch bemerkt werden sollen, dass einer Seite, die $> \pi$ ist, nach § 46 sowieso der grösste Winkel des Dreiecks gegenüberliegt, dass man also ohne Beschränkung der Allgemeinheit a und $c < \pi$ annehmen kann.

S. 149, Z. 11—13 (288, Z. 3 f.). Das O. hat: $BA'C > BC'A$; $AC < \pi$; $BC > AB$.

S. 149 f. § 78. Die Kreise, von denen hier gesprochen wird, sind sämtlich grösste Kreise.

S. 149, Z. 4 v. u. (288, Z. 17). Das O. hat: $BA < \pi$, $BD < \frac{1}{2}\pi$.

S. 150, Z. 6 f. (288, Z. 13, 12 v. u.). Das bezieht sich auf den Schluss von § 66, S. 132, Z. 11—18.

S. 150, Z. 12—20 (288, Z. 10—6 v. u.). Es wird natürlich wieder vorausgesetzt, dass der Bogen DA auf dem Halbkreise ABC senkrecht steht; DA ist also der kürzeste Abstand des Punktes D von diesem Halbkreise.

S. 150 ff. § 79. Das ist der bekannte Satz über das Polardreieck, der hier allerdings in einer unvollkommenen Form erscheint. Er lässt sich nämlich in der Fassung des Textes auf solche sphärische Dreiecke, in denen eine Seite $> \pi$ ist, nicht übertragen. Eine allgemein gültige Fassung des Satzes kann man erst aufstellen, wenn man nach dem Vorgange von Möbius statt der Winkel des sphärischen Dreiecks deren Nebenwinkel einführt und mit Buchstaben bezeichnet. Vgl. darüber E. Study, Sphärische Trigonometrie u. s. w., Abh. der Leipz. Ges. d. Wiss., math. phys. Klasse Bd. XX, Nr. II, Leipzig 1893, S. 92. Sonderbar ist es, dass Lobatschefskij den Begriff des Polardreiecks gar nicht erwähnt, obwohl er in § 25 den Begriff „gegenüberliegende Pole eines grössten Kreises" ausdrücklich einführt. Vielleicht hat er das deshalb gethan, weil er auf das in § 79 angewendete Beweisverfahren besonderes Gewicht legte. Dieses Verfahren ist zwar etwas umständlich, aber doch entschieden originell.

S. 151, Z. 13—38 (289, Z. 16—28). Diese Betrachtungen zeigen, dass zu jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, dessen Katheten beide $< \frac{1}{2}\pi$ sind, ein andres rechtwinkliges Dreieck von derselben Beschaffenheit gehört. Sind:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ A & B & \frac{1}{2}\pi \end{array}$$

die Seiten und Winkel des ersten Dreiecks, so haben die Seiten und Winkel des andern die Werthe:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2}\pi - A & b & B \\ \frac{1}{2}\pi - a & c & \frac{1}{2}\pi. \end{array}$$

Um diese Dreiecke in der Fig. 71 besser hervortreten zu lassen, sind sie stärker ausgezeichnet, was im O. nicht der Fall ist.

Selbstverständlich gehört auf ganz dieselbe Weise zu dem ursprünglichen Dreiecke noch ein zweites mit den Seiten und Winkeln:

$$\begin{array}{ccc} a & \frac{1}{2}\pi - B & A \\ c & \frac{1}{2}\pi - b & \frac{1}{2}\pi. \end{array}$$

Dieser Satz über das rechtwinklige sphärische Dreieck ist allem Anscheine nach Lobatschefskij eigenthümlich und bisher vollständig un-

bekannt geblieben. Er ist deshalb merkwürdig, weil er den innern Grund der Neperschen Regel aufdeckt. Diese Regel sagt nämlich aus, dass im rechtwinkligen sphärischen Dreiecke der Cosinus jedes Stücks gleich ist dem Produkte aus den Cotangenten der beiden anliegenden Stücke und gleich dem Produkte aus den Sinus der beiden nicht anliegenden Stücke; der rechte Winkel wird dabei nicht mitgezählt, und die Katheten sind durch ihre Ergänzungen zu $\frac{1}{2}\pi$ zu ersetzen. Denkt man sich daher aus den Stücken des Dreiecks den Cyklus gebildet:

$$\ldots, \tfrac{1}{2}\pi - b, \tfrac{1}{2}\pi - a, B, c, A, \tfrac{1}{2}\pi - b, \tfrac{1}{2}\pi - a, B, c, A, \ldots$$

so ist der Cosinus jedes Gliedes des Cyklus gleich dem Produkte aus den Cotangenten der beiden benachbarten und gleich dem Produkte aus den Sinus der beiden nicht benachbarten Stücke. Ersetzt man nun die Stücke des ursprünglichen Dreiecks durch die Stücke eines der beiden neuen Dreiecke, die nach Lobatschefskij dazu gehören, so bleibt der Cyklus als Ganzes ungeändert, abgesehen vom Durchlaufungssinne, der in den entgegengesetzten übergeht; ausserdem wird aber zugleich c durch eines der benachbarten Stücke ersetzt. Vertauscht man andrerseits a mit b und A mit B, so bleibt der Cyklus wieder, abgesehen von dem Durchlaufungssinne, ungeändert, während c diesmal an seiner Stelle bleibt. Wendet man daher die beiden beschriebenen Operationen nach einander an, so ist das Ergebniss einfach eine cyklische Vertauschung der Glieder unsers Cyklus. Hierin liegt, dass die Gleichungen:

$$\cos c = \cot A \,.\, \cot B, \quad \cos c = \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - a\right) . \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - b\right)$$

richtig bleiben, wenn man für $\frac{1}{2}\pi - a$, B, c, A, $\frac{1}{2}\pi - b$ fünf aufeinanderfolgende Glieder des Cyklus setzt. Das aber ist eben die Nepersche Regel.

Durch die Betrachtungen des Textes ist allerdings bewiesen, dass zu jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, dessen Katheten $< \frac{1}{2}\pi$ sind, ein ebensolches Dreieck gehört. Es ist aber kaum anzunehmen, dass Lobatschefskij das Entsprechen zwischen beiden Dreiecken auf dem im Texte angegebenen Wege gefunden hat. Vielmehr wird er den Beweis des Textes erst nachträglich entdeckt haben, nachdem er dieses Entsprechen vorher auf einem andern Wege erkannt hatte. Es liegt nahe zu vermuthen, dass dieser „andre Weg“ durch die Beziehung gegeben ist, die Lobatschefskij schon 1829 zwischen den rechtwinkligen geradlinigen Dreiecken der nichteuklidischen Geometrie und den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken hergestellt hat, s. hier S. 18 f. In den N. A. entwickelt Lobatschefskij diese Beziehung erst später, in § 136, weil sie den Begriff des Parallelwinkels voraussetzt. Wir ziehen aber doch vor, gleich jetzt zu zeigen, wie aus der letztern Beziehung der vorhin besprochene Uebergang von einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke zu einem andern abgeleitet werden kann.

Nach S. 18 f. und nach § 136 der N. A. entspricht jedem rechtwinkligen geradlinigen Dreiecke Δ mit den Seiten und Winkeln:

$$\Delta \begin{cases} l & m & n \\ \Pi(l') & \Pi(m') & \tfrac{1}{2}\pi \end{cases}$$

ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck Δ' mit den Seiten und Winkeln:

$$\Delta' \left\{ \begin{array}{lll} \Pi(n) & \Pi(l') & \Pi(m) \\ \Pi(l) & \frac{1}{2}\pi - \Pi(m') & \frac{1}{2}\pi, \end{array} \right.$$

wo $\Pi(a)$ der zu dem Lothe a gehörige Parallelwinkel ist (vgl. S. 239 und N. A. § 93) und wo also die Winkel $\Pi(l)$, $\Pi(m)$, $\Pi(n)$, $\Pi(l')$, $\Pi(m')$ sämtlich $< \frac{1}{2}\pi$ sind. Nach S. 241 f. ist überdies auch umgekehrt das Dreieck Δ durch das Dreieck Δ' vollständig bestimmt, und man kann durch geeignete Wahl des Dreiecks Δ erreichen, dass Δ' jedes beliebige rechtwinklige sphärische Dreieck wird, dessen beide Katheten $< \frac{1}{2}\pi$ sind. In den Ausdrücken für die Stücke des Dreiecks Δ' treten nun offenbar die Katheten und die spitzen Winkel des Dreiecks Δ nicht symmetrisch auf. Zu Δ gehört daher noch ein zweites rechtwinkliges sphärisches Dreieck:

$$\Delta'' \left\{ \begin{array}{lll} \Pi(n) & \Pi(m') & \Pi(l) \\ \Pi(m) & \frac{1}{2}\pi - \Pi(l') & \frac{1}{2}\pi. \end{array} \right.$$

Demnach bekommt man zu jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke Δ', dessen Katheten beide $< \frac{1}{2}\pi$ sind, ein ebensolches Dreieck Δ'' zugeordnet. Setzt man endlich:

$$\Pi(n) = a, \quad \Pi(l') = b, \quad \Pi(m) = c, \quad \Pi(l) = A, \quad \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(m') = B$$

oder:

$$\Pi(n) = b, \quad \Pi(l') = a, \quad \Pi(m) = c, \quad \Pi(l) = B, \quad \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(m') = A,$$

so findet man wieder die beiden rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, die nach dem Früheren zu dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke mit den Seiten und Winkeln: a, b, c, A, B gehören, sobald $a < \frac{1}{2}\pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$.

S. 151, Z. 3—1 v. u. (289, Z. 7—5 v. u.). Vgl. die Anmerkung zum Schlusse des § 74, S. 325, Z. 20 ff.

S. 152, Z. 17, 15 und 14 v. u. (290, Z. 11, 13 und 13). Das O. hat: $b < \frac{1}{2}\pi$ statt: $b < \pi$; $\frac{1}{2}\pi - B$ und $\frac{1}{2}\pi - b$ statt: $\pi - B$ und: $\pi - b$.

S. 152, Z. 3, 2 v. u. (290, Z. 17 f.). Nach § 78 ist wegen $b < \frac{1}{2}\pi$ und $c - \frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}\pi$ auch $B < \frac{1}{2}\pi$, und nach § 75 ist wegen $B < \frac{1}{2}\pi$ auch $A < \frac{1}{2}\pi$. Das „folglich" verweist auf den S. 151 bewiesenen Satz über das rechtwinklige sphärische Dreieck.

S. 153, Z. 11 (290, Z. 9 v. u.). Das O. hat b statt: a.

S. 153, Z. 14—17 (290, Z. 7—5 v. u.). Im Vorhergehenden sind nämlich die folgenden Fälle erledigt:

zwei Seiten $< \frac{1}{2}\pi$, eine $< \pi$

zwei Seiten $= \frac{1}{2}\pi$, eine $< \pi$

eine Seite $= \frac{1}{2}\pi$, eine $< \frac{1}{2}\pi$, eine $> \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$

zwei Seiten $> \frac{1}{2}\pi$, eine $< \pi$,

und damit sind in der That alle möglichen Fälle erschöpft, sobald die drei Seiten sämtlich $< \pi$ sind. — Dass die Summe der drei Seiten $< 2\pi$ ist, folgt ohne Weiteres daraus, dass $\pi - a + \pi - b + \pi - c > \pi$ werden muss.

S. 153, Z. 9, 8 v. u. (291, Z. 3 f.). Ist $c < \frac{1}{2}\pi$, so sind x und $c - x$

von selbst $< \frac{1}{2}\pi$ und also nach § 78 auch b und $a < \frac{1}{2}\pi$. Ist $c \geqq \frac{1}{2}\pi$, so sind wegen der im Satze gemachten Voraussetzung a und b beide $< \frac{1}{2}\pi$, also, wieder nach § 78, auch $c - x$ und x beide $< \frac{1}{2}\pi$.

S. 154, Z. 3—5 (291, Z. 5—3 v. u.). Hierbei wird selbstverständlich vorausgesetzt, dass die dritte Seite $< \pi$ ist.

S. 154, Z. 12—18 (292, Z. 3—8). Es dürfte angebracht sein, auf einen wesentlichen Unterschied aufmerksam zu machen, der sich bei der Betrachtung der Kongruenzsätze zwischen der Euklidischen und der nichteuklidischen Geometrie herausstellt. Allerdings haben beide Geometrieen das gemeinsam, dass jeder Kongruenzsatz zugleich einen Satz in sich schliesst, der aussagt: ein geradliniges Dreieck ist, abgesehen von seiner Lage in der Ebene, vollständig bestimmt, sobald drei seiner Stücke gegeben sind, vorausgesetzt nur, dass die gegebenen Stücke überhaupt einem Dreiecke angehören können. Während aber in der Euklidischen Geometrie die Konstruktion, durch die das Dreieck aus den gegebenen Stücken gefunden wird, immer unmittelbar auf der Hand liegt, ist das in der nichteuklidischen Geometrie nur bei gewissen der Kongruenzsätze der Fall, nämlich bei denen der §§ 81, 82, 84, 85. Bei den Sätzen in § 87 und 92 dagegen ist erst noch ein rein geometrischer Beweis dafür erforderlich, dass das Dreieck aus den betreffenden drei Stücken wirklich mit Zirkel und Lineal konstruirt werden kann; denn man wird sich doch nicht damit begnügen wollen, dass das Vorhandensein des Dreiecks aus der Stetigkeit folgt. Es ist ein entschiedener Mangel, dass Lobatschefskij auf diese und ähnliche Fragen gar nicht eingeht und überhaupt die Konstruktionen der nichteuklischen Geometrie ganz vernachlässigt. Derselbe Vorwurf ist übrigens der üblichen Behandlung der sphärischen Geometrie zu machen, nur dass da die Konstruktionen wesentlich leichter sind als in der hier betrachteten.

S. 154, Z. 7—5 v. u. (292, Z. 8, 7 v. u.). Das muss man im Folgenden immer im Auge behalten.

S. 155, Z. 14, 13 v. u. (293, Z. 16 v. u.). Das O. hat: „Im Kreise liegen gleichen Sehnen gleiche Winkel gegenüber", was keinen Sinn hat, so lange der Satz des § 82 noch nicht bewiesen ist.

S. 155, Z. 4 v. u. (293, Z. 12 v. u.). Das O. hat AC statt: AB.

S. 157, Z. 3 (294, Z, 9). Das O. hat: $AB = A'B'$ statt: $BC = B'C'$.

S. 157. § 85. Der Satz ist noch nicht scharf genug gefasst, es müsste eigentlich heissen: „und überdies entweder beide Dreiecke spitzwinklig sind oder beide stumpfwinklig, jedoch so, dass der stumpfe Winkel in beiden Dreiecken entweder zwischen den gleichen Seiten liegt oder gegenüber der grösseren". Beim Beweise wird in der That stillschweigend diese Voraussetzung gemacht. Dass sie nothwendig ist, liegt auf der Hand.

S. 158, Z. 12 v. u. (295, Z. 16). Das O. hat: $= \pi$ statt: $= \frac{1}{2}\pi$.

S. 158, Z. 10—4 v. u. (295, Z. 18—16 v. u.). Hier ist der Fall $BA = BC = \frac{1}{2}\pi$ übersehen; dann ist nämlich der beschriebene Kreis eben der Bogen AC. In den Satz hätte daher noch die Bedingung aufgenommen werden sollen, dass die gleichen Seiten nicht beide gleich $\frac{1}{2}\pi$ sein dürfen. Will man auch den Fall berücksichtigen, dass eine der Seiten $> \pi$ ist, so muss noch die Möglichkeit: $BA = \frac{1}{2}\pi$, $BC = \frac{3}{2}\pi$ ausgeschlossen werden.

S. 159, Z. 1 (295, Z. 14 v. u.). Das O. hat: A', C statt: A, C.

S. 159, Z. 12—15 (295, Z. 6—4 v. u.). Hierbei wird vorausgesetzt,

dass die dritte Seite in beiden Dreiecken $< \pi$ ist, vgl. die Anmerkung zu § 74, S. 324, Z. 24 ff.

S. 159, Z. 18 v. u. (296, Z. 1). Das O. hat Fig. 83 statt 81.

S. 160, Z. 4 (296, Z. 13). Das O. hat Fig. 84 statt 82.

S. 160, Z. 17—22 (296, Z. 15—11 v. u.). Ist nämlich $\angle C = \frac{1}{2}\pi$ und $\angle A$ spitz, so kann BC nicht gleich $\frac{1}{2}\pi$ sein.

S. 160, Z. 16 v. u. (296, Z. 9 v. u.). Das O. hat Fig. 85 statt 83.

S. 161, Z. 11 (297, Z. 9). Das O. hat Fig. 46 statt 47.

S. 161, Z. 17 v. u. (297, Z. 17). Das O. hat $\angle FCA$ statt FAC.

S. 161, Z. 5 v. u.—162, Z. 10 v. u. (297, Z. 6 v. u.—298, Z. 17). Das ist eben der Beweis, den Legendre 1800 in der dritten Ausgabe seiner Éléments de Géométrie veröffentlicht hat, Proposition XIX, vgl. S. 313.

S. 162, Z. 11 v. u. (298, Z. 16). Zunächst findet man:

$$c + na + c > nb.$$

S. 162 ff., § 91. Diesen Satz hat Saccheri bereits 1733 bewiesen, s. P. Th. S. 67, Lehrsatz XV, ebenso Lambert 1766, s. P. Th. S. 185, § 51.

S. 163, Z. 18, 13 und 2 v. u. (299, Z. 5, 7 und 14). Das O. hat $ABCD$ statt: $ABFE$; ABC statt BAC und: ABC statt ADE.

S. 164, Z. 7 (299, Z. 17 v. u.). Man findet den Legendreschen Beweis in den Réflexions von 1833 an der auf S. 313, Z. 10—9 v. u. angeführten Stelle. Vgl. P. Th. S. 320.

S. 164, Z. 14—12 v. u. (299, Z. 3—1 v. u.). Weil nämlich nach § 68 und 80 die Winkelsumme des sphärischen Dreiecks gleich π wird, sobald der Inhalt des Dreiecks verschwindet.

S. 164 f. § 92. Auch dieser Satz findet sich im Grunde schon bei Saccheri, denn Saccheri beweist, dass Dreiecke mit gleichen Winkeln aber ungleichen Seiten nicht möglich sind, sobald die Winkelsumme im Dreiecke von π verschieden ist, s. P. Th. S. 84 f. Dieselbe Bemerkung hat auch Lambert gemacht, s. P. Th. S. 200 f.

S. 166, Z. 19, 20 (302, Z. 1, 1). Das O. hat EG statt CG und EG' statt CG'.

S. 166, Z. 8, 7 v. u. (302, Z. 9, 10). Das O. hat beide Male AD statt DA. Ueberhaupt legt Lobatschefskij keinen Werth darauf, bei parallelen Geraden die Buchstaben in der Anordnung zu nennen, dass die Seite des Parallelismus (vgl. § 109) hervortritt. Ebenso nennt er bei kongruenten Dreiecken die Ecken sehr häufig in einer Reihenfolge, die nicht erkennen lässt, welche Ecken einander entsprechen.

S. 167, Z. 11 f. (302, Z. 12 v. u.). Ueber die Benennung „Parallelwinkel" vgl. S. 239.

S. 168, Z. 7, 6 v. u. (303, Z. 9, 8 v. u.). Der Winkel DAC ist vollkommen willkürlich innerhalb der Oeffnung des Winkels DAB, der nach § 53 grösser ist als $DE'K'$.

S. 169, Z. 12 v. u. (304, Z. 15). Hier hätte bemerkt werden sollen, dass FE sicher weder AB noch CD schneiden kann.

S. 170 f., § 98. Dieser Satz findet sich schon 1825 bei Taurinus, s. P. Th. S. 263.

S. 171, Z. 5 (305, Z. 11 f.). Das O. hat § 91 statt 90 und $CD' = AD$ statt: $CD' = AD'$.

S. 171, Z. 16—21 (305, Z. 19—21). Dass der $\angle DGE \leqq \frac{1}{2}\pi$ ist, ergiebt sich eigentlich erst, sobald bewiesen ist, dass GD und EF parallel sind. Hier ist es übrigens gleichgültig, denn es kommt nur darauf an, dass CD das Loth AE schneidet, das aber würde auch dann der Fall sein, wenn $\angle BAE > \angle BAC$ wäre. Dann bestimmten nämlich die Lothe AC und AE zusammen mit dem vom C aus auf FE gefällten Lothe CE' ein Viereck $ACE'E$, aus dem DC nicht wieder heraustreten könnte, ohne AE zu schneiden, denn DC und FE können keinen Punkt gemein haben, weil es sonst von diesem Punkte aus zwei verschiedene Parallelen zu AB gäbe.

S. 171, Z. 5, 4 v. u. (305, Z. 4 v. u.). Hier ist der $\angle BAC$ wieder spitz, und wenn man von C aus auf FE das Loth CE' fällt, so wird auch $\angle DCE'$ spitz. Der Fusspunkt E des Lothes AE muss daher zwischen E' und F fallen, folglich schneidet CD das Loth AE sicher in einem Punkte G zwischen C und D.

S. 172, Z. 3 (306, Z. 1). Das O. hat FE und DA' statt EF und $A'D$.

S. 172, Z. 5—11 (306, Z. 3—6). Das O. hat dreimal DC statt CD. Der Beweis ist etwas zu kurz gerathen, denn von vorn herein ist es nicht sicher, dass $BACD$ eine Ebene ist. Man muss vielmehr so schliessen: Die Ebenen ACD und $BAEF$ haben den im Endlichen liegenden Punkt A gemein und müssen somit nach § 97 einander in einer durch A gehenden Geraden schneiden, die zu EF parallel ist. Da diese Gerade in der Ebene $BAEF$ liegt, so muss sie mit der Geraden AB zusammenfallen.

S. 172, Z. 14—10 v. u. (306, Z. 14—17). Man beachte, dass: $\alpha = fdc$, $\beta = abc$, $\gamma = d'f'e'$, $\delta = dfe = f'd'e'$, $def = \pi - bac$, $d'e'f' = \pi - bca$.

S. 172, Z. 4 v. u. (306, Z. 11 v. u.). Das O. hat:

$$r = p + q - \delta + \tfrac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta - \gamma).$$

S. 172, Z. 3—1 v. u. (306, Z. 10, 9 v. u.). Dass die Bogen de und $e'f'$ unbegränzt abnehmen, sobald B' sich von B entfernt, ist nach § 93 unmittelbar klar. Da andererseits mit abnehmender Seite de der Winkel $dfe = \delta$ immer kleiner wird und umgekehrt, und da ebenso mit abnehmender Seite $f'e'$ der Winkel $f'd'e'$ immer kleiner wird und umgekehrt, so muss auch δ beliebig klein werden, wenn B' weit genug von B abrückt. Dagegen ist es ohne die Zuziehung der sphärischen Dreiecke dfe und $e'd'f'$ keineswegs von vornherein klar, dass der Winkel δ beliebig klein gemacht werden kann.

Es erscheint wünschenswerth einen direkteren Beweis dafür zu geben, dass δ beliebig klein gemacht werden kann, und das ist auch ganz leicht, wenn man nur die Punkte A, B, C von vornherein in geeigneter Weise wählt.

Man wähle B so, dass die in den Ebenen $B'BAA'$ und $B'BCC'$ auf BB' errichteten Lothe die Geraden AA' und CC' in zwei Punkten A und C schneiden (Fig. 53'). Das ist immer möglich, denn man braucht nur auf jeder der beiden Geraden AA' und CC' einen beliebigen Punkt anzunehmen und von diesen Punkten aus Lothe auf BB' zu fällen; eines der Lothe hat dann seinen Fusspunkt näher an B' als das andre und der Fusspunkt jenes Lothes ist ein Punkt B von der verlangten Beschaffenheit.

Die Ebene ABC steht jetzt nach § 56 auf BB' senkrecht. Fällt man nun von B aus auf AC das Loth BD und legt durch BB' und BD die Ebene $B'BD$, so wird diese nach § 61 auch das auf ABC in D errichtete Loth enthalten und mithin nicht blos auf der Ebene ABC (s. § 59) sondern auch auf AC senkrecht stehen. Ferner wird $B'BD$ die Ebenen $AB'C$ und $A'ACC'$ in zwei Geraden DB' und DD' schneiden, die mit einander den Winkel δ bilden und von denen die zweite, als Schnitt zweier durch die Parallelen AA' und BB' gehenden Ebenen, nach § 97 zu BB' parallel ist. Nunmehr ist es unmittelbar klar, dass der Winkel δ beliebig klein gemacht werden kann, wenn sich nur B' weit genug von A entfernt, denn zieht man von D aus in der Winkelöffnung $D'DB$ eine Gerade DE, die mit DD' einen beliebig kleinen Winkel bildet, so muss die nach § 93 BB' stets schneiden.

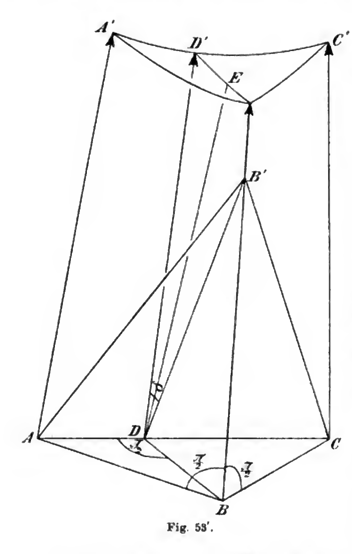


Fig. 53'.

S. 173, Z. 3 (306, Z. 7 v. u.). Die Ungleichheiten: $p<\delta$, $q<\delta$ folgen ebenfalls aus § 80.

S. 173, Z. 4—1 v. u. (307, Z. 15—17). In § 91 ist nämlich gezeigt, dass von zwei Dreiecken, deren eines innerhalb des andern liegt, das grössere stets die kleinere Winkelsumme hat, sobald die Winkelsumme im Dreiecke $<\pi$ ist; s. S. 164, Z. 15—22. Leider hat Lobatschefskij unterlassen, dieses Ergebniss ausdrücklich als Satz auszusprechen. — Durch die Annahme $\alpha = 0$ wird der Widersinn deshalb beseitigt, weil dann AD parallel zu CE wird und also gar kein Dreieck ADC entsteht.

S. 174 f., § 102. Lobatschefskijs Beweis für den Satz, dass jeder spitze Winkel der Parallelwinkel eines Lothes von ganz bestimmter Länge ist, leidet an dem Gebrechen, dass er von der Stetigkeit Gebrauch macht; denn darauf kommt es hinaus, wenn auf S. 175, Z. 4—8 als selbstverständlich angenommen wird, es müsse eine Senkrechte geben, die die Gränze ist zwischen den Schneidenden und den Nichtschneidenden. Bei der Erklärung des Parallelismus in § 93 war die Benutzung der Stetigkeit nicht zu umgehen; hier aber hätte sie, wenn irgend möglich, vermieden werden sollen. Unter alleiniger Benutzung des Begriffes parallele Linien und der früher bewiesenen Sätze hätte gezeigt werden sollen, dass zu jedem spitzen Winkel eine Gerade konstruirt werden kann, die auf dem einen Schenkel

des Winkels senkrecht steht und zu dem andern Schenkel parallel ist. Statt dessen beweist Lobatschefskij auch mit Hülfe der Stetigkeit nur, dass eine solche Gerade existirt, ohne im Geringsten die Möglichkeit ihrer Konstruktion zu berücksichtigen.

Es ist in der That möglich, diesem Mangel abzuhelfen. J. Bolyai hat nämlich in § 35 seines Appendix eine Konstruktion entwickelt, die zu jedem gegebenen spitzen Winkel das Loth liefert, dessen Parallelwinkel er ist, und die ausser Lineal und Zirkel weiter nichts benutzt als die Voraussetzung, dass man von einem gegebenen Punkte aus zu einer gegebenen Geraden die Parallelen ziehen kann. Allerdings beruht J. Bolyais Beweis für die Richtigkeit dieser Konstruktion auch auf Sätzen, die er nur mit Hülfe der Stetigkeit bewiesen hat, wie er denn überhaupt von der Stetigkeit sehr ausgiebigen Gebrauch macht, bei Weitem mehr als Lobatschefskij, der sonst in dieser Beziehung recht streng ist. Aber es lässt sich zeigen, dass der Beweis für die Richtigkeit dieser Bolyaischen Konstruktion ohne Benutzung der Stetigkeit erbracht werden kann; doch muss die nicht ganz kurze Durchführung dieses Gedankens einer andern Gelegenheit vorbehalten bleiben.

S. 174, Z. 19—175, Z. 3 (307, Z. 4 v. u. — 308, Z. 8). Dieses ganze Verfahren findet sich schon bei Taurinus, s. P. Th. S. 264.

S. 175, Z. 12 (308, Z. 14). Das O. hat: „Die erste" statt: „Die zweite".

S. 178f. § 106. Diese beiden Sätze hat schon Saccheri 1733 bewiesen, s. P. Th. S. 72—74, Lehrsatz XX und XIX.

S. 178, Z. 8, 7 v. u. (311, Z. 14f.). Nach § 91, S. 164 ist in dem Dreiecke ABC die Winkelsumme kleiner als in dem Dreiecke ADF, also $\angle HFG = \angle AFD > \angle ACB = \angle FHG$.

S. 179, Z. 1—7 (311, Z. 12—9 v. u.). Lobatschefskij benutzt hier ohne Weiteres die beiden Sätze, mit denen Saccheri 1733 seinen „Euclides ab omni naevo vindicatus" beginnt, s. P. Th. S. 50f., Lehrsatz I und II. Man kann dort die Beweise nachlesen, wenn man nicht vorzieht, sie sich selbst zurecht zu legen, was keine Schwierigkeit hat.

S. 179, Z. 10—12 (311, Z. 8, 7 v. u.). Aus § 91, S. 164 folgt ja, dass die Winkelsumme des Vierecks $FLOD$ kleiner ist als die des Vierecks $DFGH$, also ist $\angle DOL$ kleiner als der spitze Winkel DHG.

S. 179, Z. 22 (311, Z. 1 v. u.). Im ersten Theile des Beweises ist gezeigt, dass (s. Fig. 103) bei wachsendem AD der Schenkel AF stärker wächst als der Schenkel AD, im zweiten Theile ist gezeigt, dass gleichzeitig das Loth DF stärker wächst als der Schenkel AF. Der Satz ist also bewiesen.

S. 180, Z. 18f. (312, Z. 5 v. u.). Das O. hat: $BD > EF$ statt: $HD > GF$. Die Ungleichheit auf Z. 24 (Z. 1 v. u.) folgt daraus, dass $\angle CAE$ und die Winkel bei C, F, D, G Rechte sind, also die Winkel AEF und AHD spitz. Es wird also: $HD + c = HD + EG > GF + EG$, was $= EF$ ist. Die Ungleichheit: $BD > EF$ nützt hier nichts.

S. 181, Z. 16 v. u. (313, Z. 10 v. u.). Das O. hat GAC statt BAC.

S. 183, Fig. 110. In der Originalfigur fehlt der Buchstabe M.

S. 183, Z. 1 v. u. (315, Z. 17). Das O. hat GQ statt PQ.

S. 184, Z. 1, 6 (315, Z. 18, 22). Das O. hat GNK und CNB statt: PNK und CNB'.

S. 184, Z. 9 v. u. (316, Z. 2). Das O. hat PG statt PS.

S. 184, Z. 8—5 v. u. (316, Z. 2—4). Bei dem Dreiecke $B'BC$ ist $NP = b$ dasselbe, was bei dem Dreiecke ABC die Linie $LH = HR = c < b$ war. Wie man also aus dem Dreiecke ABC mit der Seite $AB = a$ das neue $B'BC$ abgeleitet hat, in dem die Seite $BB' < a - 2b < a - 2c$ ist, so kann man aus dem Dreiecke $B'BC$ ein neues $B''BC$ ableiten mit der Seite: $BB'' < a - 2c - 2b$. Ferner wird die Linie, die in dem Dreiecke $B''BC$ dieselbe Rolle spielt, wie $NP = b$ in dem Dreiecke $B'BC$ und $LH = c$ in dem Dreiecke ABC, grösser sein als b, gerade so wie $b > c$ war. Man kann daher genau in derselben Weise zu einem vierten Dreiecke übergehen und so fort.

S. 182—184. § 111. In den G. U. hat **Lobatschefskij** den Beweis dieses Satzes wesentlich vereinfacht, s. G. U. Nr. 30, S. 34—37, in den G. A., II, S. 566 f. Der erste Fall, wo von den drei Mittelsenkrechten (s. Fig. 54′) die beiden äusseren DE und FG als parallel angenommen werden, wird genau so erledigt, wie auf S. 183, Z. 7—24, dann aber wird noch bemerkt: „Setzt man die Seite: $BC = 2a$, $AC = 2b$, $AB = 2c$ und bezeichnet die diesen Seiten gegenüberstehenden Winkel durch A, B, C, so ist in dem so eben betrachteten Falle

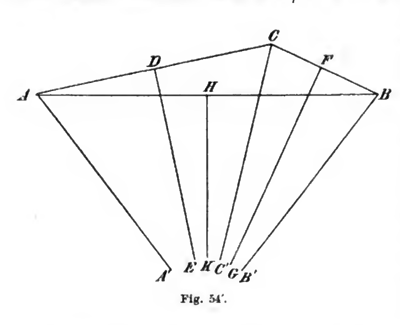


Fig. 54′.

$$A = \Pi(b) - \Pi(c), \quad B = \Pi(a) - \Pi(c), \quad C = \Pi(a) + \Pi(b),$$

wie man sich leicht überzeugt mit Hülfe der Linien AA', BB', CC', welche aus den Punkten A, B, C parallel mit dem Perpendikel HK und folglich mit den beiden andern Perpendikeln DE und FG gezogen sind (23. und 25. Satz [hier § 102 und 99])“.

Nunmehr kommt der zweite Fall:

„Es seien jetzt die beiden Perpendikel HK und FG parallel, so kann der dritte DE sie nicht schneiden (29. Satz [hier § 110]), mithin ist er entweder parallel mit ihnen, oder er schneidet AA'. Die letzte Annahme heisst nichts anderes, als dass der Winkel $C > \Pi(a) + \Pi(b)$. Vermindert man diesen Winkel, so dass er gleich $\Pi(a) + \Pi(b)$ wird, indem man dergestalt der Linie AC die neue Lage CQ giebt, (Fig. 23 [hier 55′]) und bezeichnet man die Grösse der dritten Seite BQ durch $2c'$, so

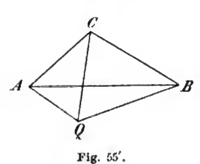


Fig. 55′.

muss der Winkel CBQ am Punkte B, welcher vergrössert wurde, nachdem was oben bewiesen ist, gleich $\Pi(a) - \Pi(c') > \Pi(a) - \Pi(c)$ sein, woraus folgt $c' > c$ (23. Satz [hier § 102]). Im Dreiecke ACQ sind jedoch die Winkel bei A und Q gleich, mithin muss im Dreiecke ABQ der Winkel bei Q grösser sein als der am Punkte A, folglich ist $AB > BQ$ (9. Satz [hier § 54]); das heisst es ist $c > c'$." s. p. 453

Die Worte: „nachdem was oben bewiesen ist" beziehen sich darauf, dass in dem Dreiecke QCB die zu den Seiten QC und CB gehörigen Mittelsenkrechten parallel sind, dass also bei diesem Dreiecke der erste, bereits erledigte Fall verwirklicht ist.

S. 185, Z. 16 v. u. (317, Z. 14). Hier ist augenscheinlich im Originaltexte etwas ausgefallen, man kann aber zweifelhaft sein, ob man ergänzen soll: „und zu CD" oder: „und zu EF", das letztere ist sogar vielleicht das Richtigere. Ueberhaupt ist aber die ganze Darstellung etwas zu knapp gehalten, und vor allen Dingen fehlt eigentlich der Nachweis, dass die Gränzlinie mit jeder zu AB parallelen Geraden einen Punkt gemein hat. Lobatschefskij hat diesen Nachweis wahrscheinlich für überflüssig gehalten, weil sich aus seiner Definition ergiebt, dass die Gränzlinie eine kontinuirliche Kurve ist. Wenn nämlich EF eine beliebige Parallele zu AB ist, so liefert das von A aus auf EF gefällte Loth AE einen jenseits von EF liegenden Punkt C der Gränzlinie, sobald man die Verlängerung $EC = AE$ macht; die Kontinuität der Gränzlinie bringt es dann mit sich, dass zwischen A und C ein Punkt der Gränzlinie liegt, der der Geraden EF angehört.

In den G. U. Nr. 31, S. 37 f., s. G. A. II, S. 567, erklärt Lobatschefskij die Gränzlinie folgendermassen:

„Grenzlinie (Oricycle) nennen wir diejenige in einer Ebene liegende krumme Linie, für welche alle Perpendikel auf den Mittelpunkten der Sehnen errichtet unter sich parallel sind."

„In Uebereinstimmung mit dieser Definition kann man sich die Erzeugung der Grenzlinie vorstellen, wenn man zu einer gegebenen Linie AB (Fig. 24 [hier 56']) aus einem in ihr gegebenen Punkte A unter verschiedenen Winkeln $CAB = \Pi(a)$ Sehnen $AC = 2a$ zieht; das Ende C einer solchen Sehne wird auf der Grenzlinie liegen, deren Punkte man so allmählich bestimmen kann. Der Perpendikel DE auf der Sehne AC in deren Mitte D errichtet, wird parallel mit der Linie AB sein, welche wir Axe der Grenzlinie nennen werden. Auf gleiche Weise wird auch jeder Perpendikel FG im Mittelpunkte irgend einer Sehne AH

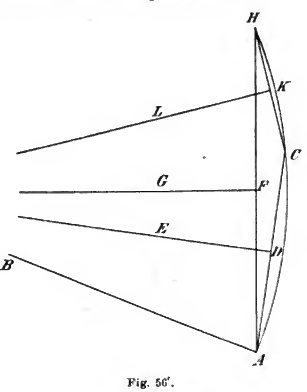


Fig. 56'.

errichtet, parallel mit AB sein, folglich muss diese Eigenschaft auch jedem Perpendikel KL überhaupt angehören, welcher im Mittelpunkte K irgend einer Sehne CH errichtet ist, zwischen welchen Punkten C und H, auf der Grenzlinie diese auch gezogen sein mag (30. Satz [hier § 111]). Dergleichen Perpendikel müssen daher ebenfalls ohne Unterscheidung von AB Axen der Grenzlinie genannt werden."

Auch hier wird also die Kontinuität der Gränzlinie benutzt, während es vom rein geometrischen Standpunkte aus erforderlich wäre, zu zeigen, dass auf jeder Parallelen CD zu AB (Fig. 113) ein Punkt C konstruirt werden kann, dass $\angle BAC = \angle DCA$ wird; das Wort „konstruiren" in dem Sinne genommen, dass ausser der Benutzung von Zirkel und Lineal nur noch die Voraussetzung gestattet ist, man könne durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden die Parallelen ziehen. Es würde jedoch zu weit führen, wollte ich hier die Möglichkeit dieser Konstruktion darthun.

S. 185. Fig. 113. In der Originalfigur reichen die Geraden FE, HG bis zur Gränzlinie, als ob E und G Punkte der Gränzlinie wären.

S. 187, Z. 12—14 (318, Z. 2, 1 v. u.). Weil nämlich HF die Gerade AD immer schneidet, wie klein auch der Winkel $EHF = \gamma$ angenommen werden möge.

S. 188, Z. 1—3 (319, Z. 14—12 v. u.). In § 114 ist eigentlich nur bewiesen, dass jede einzelne der Linien $BD = \delta$ und $CE = \gamma$ kleiner gemacht werden kann als jede gegebene Linie, nicht aber, dass dies bei beiden gleichzeitig möglich ist. Um das noch zu zeigen, bedenke man, dass die Winkel CBD und BCE gleich sind, weil B und C auf einer Gränzlinie mit den parallelen Axen BD und CE liegen; denkt man sich andrerseits durch D und E die Durchmesser des Kreises ADE gezogen und beachtet, dass diese die durch A gehende Axe der Gränzlinie ABC schneiden müssen, so erkennt man, dass $\pi - \angle BDE < \pi - \angle CED$ ist, also $\angle BDE > \angle CED$, woraus sofort folgt: $CE > BD$. Wird daher CE beliebig klein gemacht, so wird BD erst recht klein.

S. 188, Z. 19 (319, Z. 4 v. u.). Das O. hat Fig. 117 statt 116.

S. 189, Z. 13—15 (320, Z. 14, 13 v. u.). Beim Kreise ist ja der Bogen, der zu einer m-mal kleineren Sehne gehört, kleiner als der m-te Theil des ursprünglichen Bogens, dasselbe gilt daher auch von den entsprechenden Centriwinkeln. Die Worte „von Eins" fehlen im O., sind aber zum Verständnisse unentbehrlich, es hätte nur auch das BC des Originals durch AB ersetzt werden müssen.

S. 189, Z. 9, 8 v. u. (320, Z. 3, 2 v. u.). Dass die Abstände EE' und FF' gleich sind, folgt daraus, dass nach § 112: $\angle DFE = \angle BEF$ und: $\angle DF'E' = \angle BE'F'$.

S. 190, Z. 19 (321, Z. 13). Das O. hat: $s = s' . e^{-x}$.

S. 190, Z. 16 und 13 v. u. (321, Z. 17 und 15 v. u.). Das O. hat $c'd'$ statt cd und: $a'c' > b'd'$ statt: $aa' > bb'$.

S. 191, Z. 11—14 (322, Z. 5—7). In den G. U. Nr. 34, S. 41, s. G. A. II, S. 569, lautet die Erklärung so: „Grenzfläche (Orisphäre) wird diejenige Oberfläche genannt, welche entsteht durch die Umdrehung der Grenzlinie um eine ihrer Axen".

S. 191, Z. 14 v. u. (322, Z. 18 v. u.). Das O. hat Fig. 120 statt 119.

S. 191, Z. 12—10 v. u. (322, Z. 17 v. u.). Einfacher wäre es zu sagen: B und C mögen nicht mit AA' in einer Ebene liegen.

S. 192, Z. 4—16 (322, Z. 9—1 v. u.). Die Einführung der sphärischen Dreiecke ist überflüssig, und Lobatschefskij hat sie auch später in den G. U. a. a. O. vermieden. Dort denkt er sich — nur die Buchstaben sind anders gewählt — die Gerade QQ' genau so konstruirt wie hier, so dass also QQ' auf der Ebene ABC senkrecht steht und zu AA', BB', CC' parallel wird. Ferner denkt er sich AB in H halbirt und in der Ebene $A'ABB'$ die Gerade HH' senkrecht zu AB gezogen, was nach sich zieht, dass HH' parallel zu AA', BB' wird und also auch zu CC', QQ'. Endlich denkt er sich in der Ebene $Q'QHH'$ die Gerade HK senkrecht zu QH gezogen und bemerkt, dass HK nach früheren Sätzen (hier § 59 und 56) auf der Ebene ABC und also auch auf der Geraden AH senkrecht steht, und dass somit die zu HH' und HK senkrechte Gerade AH auf QH senkrecht stehen muss. Die Dreiecke AHQ und BHQ sind daher rechtwinklig und, weil sie in den Katheten übereinstimmen, kongruent, woraus $BQ = AQ$ folgt, während nach der Konstruktion von vornherein $AQ = CQ$ ist.

Noch etwas kürzer kommt man übrigens zum Ziele, wenn man beachtet, dass genau so wie der Punkt Q gefunden worden ist, ein solcher Punkt R gefunden werden kann, dass $RB = RA$ wird und dass die auf der Ebene ABC in R errichtete Senkrechte RR' zu AA', BB', CC' parallel wird. Nach § 99 ist dann RR' auch zu QQ' parallel, während andrerseits RR' und QQ' nach § 61, 59 und 56 beide auf RQ senkrecht stehen. Da aber hier die Winkelsumme im Dreiecke $< \pi$ vorausgesetzt wird, so ist das nur möglich, wenn R mit Q zusammenfällt, wenn also $QB = QA = QC$ ist.

S. 192, Z. 11 f. (322, Z. 3, 2 v. u.). Das O. hat: $b'a < \frac{1}{2}\pi$ statt: $qa' < \frac{1}{2}\pi$ und: $a'q = b'q$ statt: $a'q = b'q'$.

S. 192, Z. 20—22 (323, Z. 2 f.). Hier fehlt noch die Bemerkung, dass EE' nach § 97 zu BB' und CC' parallel ist.

S. 193 f. § 121. Lobatschefskij war sich augenscheinlich vollkommen darüber klar, dass sich die Gränzfläche von der Euklidischen Ebene dadurch unterscheidet, dass diese Ebene auf die andre Seite umlegbar ist, die Gränzfläche dagegen nicht. Dieser wichtige Unterschied hat zur Folge, dass zunächst nur die Sätze der Euklidischen Geometrie, die ohne Benutzung der Umlegung bewiesen sind, auf Gränzbogendreiecke angewendet werden dürfen. Insbesondere darf man daher die Sätze über das gleichschenklige Dreieck (s. § 50 und 52) nicht ohne Weiteres auf Gränzbogendreiecke übertragen, sondern muss sie für Gränzbogendreiecke besonders beweisen, was allerdings, wenn man den Raum zu Hülfe nimmt, keine Schwierigkeit hat. Merkwürdigerweise scheint Lobatschefskij das übersehen zu haben, wenigstens findet sich bei ihm keine Bemerkung, die auf die Nothwendigkeit eines solchen Beweises hindeutete. Es ist das um so merkwürdiger, als er auf S. 194 bei der Konstruktion des Dreiecks, das zu einem gegebenen symmetrisch ist, im Grunde die Sätze über das gleichschenklige Dreieck benutzt, obwohl er sie seinerzeit durch Umlegung der Ebene bewiesen hat.

Sobald man übrigens die genannten Sätze über das gleichschenklige

Gränzbogendreieck bewiesen hat, zeigen die Betrachtungen Lobatschefskijs auf S. 194 in der That, dass jeder Satz der Euklidischen Geometrie zugleich auch für Gränzbogendreiecke auf einer Gränzkugel gültig ist.

S. 194, Z. 15—13 v. u. (324, Z. 11—9 v. u.). Wäre nämlich etwa $DE + DG = \pi$, so wäre nach § 88:

$$DE = DG = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \angle DAE = \angle DAG = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \angle A = \pi.$$

Im O. steht wörtlich übersetzt: „denn bei diesen sind von den Winkeln um D herum keine zwei zusammen gleich π (§ 88)."

Uebrigens müsste eigentlich noch bewiesen werden, dass auch beim sphärischen Dreiecke der Punkt D ins Innere des Dreiecks fällt. Sind die drei Seiten AB, BC, CA alle $< \pi$, so ist unmittelbar klar, dass D ins Innere des Dreiecks fällt, denn dann ist nach § 46 auch jede der drei Winkelhalbirenden $< \pi$ und kann daher nicht aus dem Dreiecke heraustreten, ohne die gegenüberliegende Seite zu schneiden. Ist andrerseits etwa die Seite AB und also auch $\angle C > \pi$, so sind nach § 46 AC und BC beide $< \pi$, folglich kann der Bogen, der den Winkel C halbirt, nicht aus dem Dreiecke ABC heraustreten, ohne die Seite AB zu schneiden, er zerlegt daher das Dreieck ABC in zwei Dreiecke, deren Seiten sämtlich $< \pi$ sind, und daraus folgt wiederum, dass der Schnittpunkt D der drei Winkelhalbirenden im Innern des Dreiecks ABC liegt.

S. 196, Z. 5 (326, Z. 5). Das O. hat: „die beiden Linien a und a'", was eigentlich nicht hätte geändert zu werden brauchen.

S. 196, Z. 10 (326, Z. 8). Das O. hat § 103 statt 104.

S. 196, Z. 16 f. (326, Z. 14 f.). Das O. hat: „folglich ist in Q" und: „der Winkel in Q".

S. 198, Z. 15 (329, Z. 18). Das O. hat: $\sin A = - \sin A$.

S. 199, Z. 21 (330, Z. 2 v. u.). Das O. hat $\sin(-\alpha)$ statt: $\sin(\pi - \alpha)$.

S. 203, Z. 11 (335, Z. 9). Im O.: B, $\pi - A$ statt: $\pi - A$, B.

S. 203, Z. 13 v. u. (335, Z. 4 v. u.). Im O. Gl. (19) statt: (18).

S. 204, Z. 3 v. u., 205, Z. 5 (337, Z. 9, 15). Im O. (29) statt (30).

S. 205, Z. 9 (337, Z. 8 v. u.). Im O. (35) statt: (34).

S. 205, Z. 9, 8 v. u. (338, Z. 8, 9). Im O. lauten diese Gleichungen so:

$$\sin x = x - x_c^{3} + x_c^{5} - x_c^{7} + \cdots$$
$$\cos x = 1 - x_c^{2} + x_c^{4} - x_c^{6} + \cdots.$$

Diese Schreibweise hat Lobatschefskij jedenfalls von seinem Lehrer Bartels übernommen, vgl. J. M. C. Bartels, Vorlesungen über mathematische Analysis, I. (einziger) Band, Dorpat 1833 in der Vorrede, S. XIV: „Noch glaube ich auf die von mir seit langem gebrauchten Zeichen n_c^{r} und $n_c^{:r}$, wo ersteres die r-te durch $1 . 2 . 3 \ldots r$ dividirte Potenz von n, und letzteres den r-ten Binomialcoefficienten der n-ten Potenz bedeutet, aufmerksam machen zu dürfen".

S. 205, Z. 5 v. u. (338, Z. 12). Die Gleichungsnummer (42) fehlt im O.

S. 205, Z. 2 v. u. (338, Z. 15). Das O. hat: $\pi = 3{,}1415925643 \ldots$

S. 206, Z. 2 v. u. (339, Z. 2 v. u.). Selbstverständlich wird hier vorausgesetzt: $a < \frac{1}{2}\pi$.

S. 207, Z. 8—10 (340, Z. 5 f.). Man beachte, dass im K. B., hier S. 15, Z. 20—17 v. u., die Linien, die jetzt α und β heissen, mit a' und b' bezeichnet sind. Andrerseits wird im K. B., hier S. 17, Z. 12 f., das zu dem Parallelwinkel $\frac{1}{2}\pi - \Pi(a)$ gehörige Loth mit dem a entsprechenden griechischen Buchstaben, also mit α bezeichnet, während es jetzt, s. S. 210, Z. 4, 3 v. u., durch Hinzufügung eines Striches zu a bezeichnet wird, also mit a'.

S. 208. Bei den Figuren 125 und 126 des O. ist BC nicht über C hinaus verlängert.

S. 208, Z. 4, 8 (341, Z. 1, 3). Das O. hat: $c < b$ statt: $c < \beta$ und: § 121 statt: § 102.

S. 208. In der Fig. 127 des O. fehlt der Buchstabe c.

S. 209, Z. 2—4 (341, Z. 15 f.). Da $\Pi(b)$ augenscheinlich grösser ist als $\Pi(\alpha)$, so ist nach § 102 $\alpha > b$.

S. 209. In der Fig. 128 des O. fehlt der Buchstabe b.

S. 209, Z. 12 und 9 v. u. (341, Z. 2 und 1 v. u.). Das O. hat: $\gamma < a$ statt: $\gamma > a$ und: c statt a.

S. 209, Z. 2 v. u., 210, Z. 1, (342, Z. 7, 8). Das O. hat beide Male $\Pi(\alpha - \gamma)$ statt: $\Pi(a - \gamma)$.

S. 210, Z. 2—5 (342, Z. 9—11). Das O. hat (51) statt (52). Man erhält die Gleichungen (47), (48) und (52), wenn man die der Gleichung (54) entsprechenden:

$$\Pi(\alpha) = \Pi(b - \gamma) - \Pi(c + \beta)$$
$$\Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(b + \gamma)$$
$$\Pi(\gamma) = \Pi(b - \alpha) - \Pi(a + \beta)$$

bildet, sodann $\gamma = 0$ setzt und überdies im letzten Falle berücksichtigt, dass $\Pi(b - \alpha) = \pi - \Pi(\alpha - b)$ ist.

S. 210, Z. 9—11 (342, Z. 13 f.). Man beachte, dass jetzt die Senkrechte auf der Ebene ABC im Punkte A errichtet wird, während sie im K. B., hier S. 18, Z. 15, 14 v. u., im Punkte B errichtet wird. Die beiden Dreiecke Fig. 130 und 131, zu denen die folgenden Betrachtungen führen, unterscheiden sich daher von den entsprechenden Dreiecken des K. B., Fig. 8, S. 19 und Fig. 6, S. 17 dadurch, dass die Katheten und die spitzen Winkel des ursprünglichen Dreiecks mit einander vertauscht sind.

S. 210. In der Fig. 130 des O. fehlt $\Pi(\beta)$.

S. 210, Z. 2 v. u. — 211, Z. 4 (342, Z. 4 v. u. — 343, Z. 1). Vgl. hierzu das auf S. 241 f. Gesagte.

S. 211 (343). Von den zehn Gleichungen (55) stehen im O. die ersten fünf rechts neben den letzten fünf. Das bringt später, wenn auf die Gl. (55) verwiesen wird, einige Unzuträglichkeiten mit sich, weil man nicht weiss, welches die erste u. s. w. der Gl. (55) sein soll.

In der letzten der Gl. (55) hat das O. $\Pi(b' - \alpha')$ statt: $\Pi(b' - a')$.

Vertauscht man abwechselnd einmal a mit b, α mit β, ohne c zu ändern, und dann, ohne a und a' zu ändern, b mit α', b' mit α, c mit β,

c' mit β', so erhält man aus 55 VI der Reihe nach 55 VII, VIII, IX, X, I und dann noch:

$$2\Pi(b') = \Pi(a' - \alpha) - \Pi(a' + \alpha)$$
$$2\Pi(a') = \Pi(b' - \beta) - \Pi(b' + \beta)$$
$$2\Pi(a') = \Pi(\alpha - c) - \Pi(\alpha + c)$$
$$2\Pi(b') = \Pi(\beta - c) - \Pi(\beta + c)$$
$$2\Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(c + \beta),$$

womit sich der Cyklus schliesst. Ebenso erhält man aus 55 V der Reihe nach: 55 IV, III, II und überdies:

$$2\Pi(\alpha') = \Pi(b' - a') + \Pi(b' + a')$$
$$2\Pi(\beta') = \Pi(a' - b') + \Pi(a' + b')$$
$$2\Pi(c') = \Pi(a' - \alpha) + \Pi(a' + \alpha)$$
$$2\Pi(c') = \Pi(b' - \beta) + \Pi(b' + \beta)$$
$$2\Pi(\beta') = \Pi(\alpha - c) + \Pi(\alpha + c)$$
$$2\Pi(\alpha') = \Pi(\beta - c) + \Pi(\beta + c)$$
$$2\Pi(b) = \Pi(c - \beta) + \Pi(c + \beta),$$

womit sich der Cyklus schliesst. Die zehn neuen Gleichungen, die auf diese Weise zu den Gleichungen (55) des Textes hinzukommen, folgen aber sofort aus den Gleichungen des Textes, wenn man die Relationen:

$$\Pi(x) + \Pi(-x) = \pi, \quad \Pi(x) + \Pi(x') = \tfrac{1}{2}\pi$$

berücksichtigt; deshalb hat sie Lobatschefskij nicht mit angegeben.

S. 211 (343). Aus der ersten der Gleichungen (56) folgen durch die beiden vorhin angegebenen Operationen alle übrigen in der Reihenfolge des Textes, und aus der letzten folgt wieder die erste, so dass man einen geschlossenen Cyklus hat.

S. 212, Z. 1—214, Z. 14 (343, Z. 5 v. u.—346, Z. 5). Das hier entwickelte Verfahren zur Bestimmung der Funktion $\Pi(x)$ ist einfacher als das früher im K. B., hier S. 18—20, angedeutete, von dem Lobatschefskij im zweiten Theile des § 137 eine ausführlichere Darstellung giebt. In Nr. 35 und 36 der G. U., s. G. A., II, S. 571—574, und in der P. G. R. und F., s. G. A., I, S. 495—505, II, S. 623—633, wird dasselbe Verfahren, ohne wesentliche Aenderung, wiederholt. Es beruht auf der Vergleichung des geradlinigen Dreiecks ABC mit dem rechtwinkligen Gränzbogendreiecke, das eine durch A gehende Gränzfläche mit der Axe AA' auf den Ebenen durch AA', BB', CC' ausschneidet. Bemerkenswerth ist die Einführung der Hülfsfunktion $f(x)$, die durch $\Pi(x)$ ausgedrückt wird. Auf diesem Wege gelingt es nämlich, die Gleichungen für das rechtwinklige geradlinige Dreieck in der endgültigen Form aufzustellen, ohne vorher die Funktion $\Pi(x)$ selbst zu bestimmen, s. die Gl. (58), (59), (60); ausserdem ergiebt sich auch noch die Funktionalgleichung (61) zur Bestimmung von $\Pi(x)$ ohne Gränzübergang.

S. 213, Z. 18, 20, 24 (345, Z. 2, 4, 7). Das O. hat hier irrthümlich:

$$e^{-f(b)} \sin \Pi(b) = e^{-f(a)} \sin \Pi(c)$$
$$e^{-f(a)} \sin \Pi(a) = e^{-f(b)} \sin \Pi(b)$$
$$e^{f(a)} = \sin \Pi(a),$$

Fehler, die in den G. A. wieder abgedruckt sind, obwohl sie in den G. U. und in der P. G. nicht wiederkehren.

S. 214 (346). Die Gl. (65) lautet im O. unrichtig so:

$$\operatorname{tang} \Pi(x+y) = \frac{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)}{1 + \cos \Pi(x) \, . \, \cos \Pi(y)}.$$

Ueber die Ableitung der Gleichungen (63), (64), (65) aus (62) vgl. S. 243 f.

S. 214, Z. 15 v. u.—218, Z. 10 (346, Z. 16 v. u.—349, Z. 1 v. u.). Hier wird der im K. B., hier S. 18—20, nur angedeutete Beweis vollständig ausgeführt, und zwar stammt dieser Beweis, wie die Anmerkung auf S. 214 zeigt, aus der 1826 von Lobatschefskij vorgelegten Arbeit; vgl. S. 238, Z. 6—10. Nur die Bezeichnungen sind gegenüber dem Kasaner Boten etwas abgeändert, vgl. S. 239, Z. 1—7. Wenn man in Fig. 133 auf AD die Strecke: $AJ = c$ annimmt und von J aus auf AE das Loth JK fällt, so ist das Dreieck AKJ kongruent dem Dreiecke BCA in Fig. 129; da ferner $\angle JAB = \Pi(c)$ ist, so wird die in der Ebene ABC auf AJ errichtete Senkrechte JJ' zu AB parallel, das Dreieck AKJ steht daher zu dem sphärischen Dreiecke EDB genau in derselben Beziehung wie das Dreieck BCA in Fig. 129 zu dem sphärischen Dreiecke Fig. 130. Fällt man andrerseits in Fig. 133 von D aus auf AB die Senkrechte DL, so wird das Dreieck DLA dem Dreiecke BCA kongruent, und errichtet man auf der Ebene DBA in D die Senkrechte DD' nach der Seite von E hin, so wird DD' parallel zu AE; folglich steht das Dreieck DLA zu dem sphärischen Dreiecke EDB in einer Beziehung von genau derselben Art, wie sie zwischen dem Dreiecke ACB in Fig. 129 und dem sphärischen Fig. 130 besteht. Vgl. hierzu S. 241.

S. 215, Z. 18—16 v. u. (347, Z. 10—12). Eigentlich müsste es heissen: GB und HC parallel zu EA, und eigentlich müssten die Axen: FA, GB und HC genannt werden.

S. 215, Z. 10—8 v. u. (347, Z. 17 f.). Man erinnere sich, dass $\Pi(b) = \angle DEB$ und: $\Pi(b') = \frac{1}{2}\pi - \Pi(b) = \angle ABC$.

S. 216. Fig. 134. In der Originalfigur fehlt der Buchstabe K, ferner sind die Buchstaben m und l zwar vorhanden, aber das Loth ml ist nicht mit eingezeichnet.

S. 216, Z. 15 v. u. (348, Z. 2). Das O. hat: $CB'' = \alpha$ statt: $= \alpha'$.

S. 217, Z. 19—21 (348, Z. 9—7 v. u.). HC bleibt stets unter einer gewissen endlichen Gränze, die durch die grössten Werthe von ξ, η, ζ bestimmt ist; andrerseits ist der $\angle DCm < \angle DAE$, dieser aber, der $= \Pi(\beta)$ ist, kann beliebig klein gemacht werden, folglich gilt dasselbe auch von lm. Dass $EL > x$ ist, erkennt man nach § 106 sofort, wenn man das Dreieck ALE so umlegt, das AL auf AE und AE auf AD zu liegen kommt.

S. 217, Z. 15, 14, 13 v. u. (348, Z. 5, 4, 4 v. u.). Das O. hat:

$$\frac{Em}{B'E}, \ \frac{nm}{B'E}; \quad \frac{\xi}{\eta}, \ \frac{\zeta}{\eta}; \quad \Pi(c), \ \Pi(a), \ \Pi(\beta).$$

S. 217, Z. 3 v. u. (349, Z. 9). Das O. hat: „die zweite der Gleichungen (54)".

S. 220, Z. 8 (352, Z. 6 v. u.). Das O. hat: a, b, c statt: c, a, b.

S. 220, Z. 6 v. u. (353, Z. 14). Das O. hat: $\cos A$ statt: $\cos C$.

S. 221, Z. 1—6 (353, Z. 7—3 v. u.). Es ist auffallend, dass Lobatschefskij zuerst die Gleichung (71) hinschreibt, die aus (60) entsteht, wenn man a mit b, α mit β vertauscht, und dass er dann erst wieder in (71) a mit b, A mit B vertauscht. Ein Grund hierfür ist nicht zu erkennen.

S. 221, Z. 14 (354, Z. 5). Das O. hat: $\operatorname{tang} \Pi(a)$ statt: $\operatorname{tang} \Pi(c)$.

S. 221, Z. 20, 25 (354, Z. 10, 14). Das Vorzeichen ist beidemale wieder dadurch bestimmt, dass die Winkel A, B, $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$ sämtlich spitz sind.

S. 222, Z. 3—6 (354, Z. 1 v. u.—355, Z. 3). Es folgt nämlich (73) aus 55 IV, IX; (74) aus 55 I, II; (75) aus 55 VI, VII; (78) aus 55 V, VIII; (79) aus 55 III, X.

S. 222, Z. 16 v. u. (355, Z. 10, 9 v. u.), Das O. hat: „aus der fünften Gleichung (55)", vgl. das auf S. 339 Z. 7—4 v. u. Gesagte.

S. 222, Z. 6 v. u. (355, Z. 1 v. u.). Hierbei ist die Beziehung: $\Pi(\beta - a) = \pi - \Pi(a - \beta)$ benutzt.

S. 223, Z. 1 f. (356, Z. 5 f.). Bei der Wegschaffung von B ergiebt sich nämlich:

$$\operatorname{tg}^2 B = \frac{\sin^2 A \,.\, \operatorname{tg}^2 \Pi(a)}{\operatorname{tg}^2 \Pi(b) - \sin^2 A \,.\, \operatorname{tg}^2 \Pi(a)} = \frac{\sin^2 \Pi(a) \,.\, \sin^2 \Pi(b)}{\operatorname{tg}^2 A},$$

also, wenn man $\sin^2 A$ durch $\operatorname{tg}^2 A$ ausdrückt:

$$\operatorname{tg}^4 A + \operatorname{tg}^2 A \{\sin^2 \Pi(b) - \cos^2 \Pi(a) \operatorname{tg}^2 \Pi(b)\} = \\ = \cos^2 \Pi(a) \,.\, \operatorname{tg}^2 \Pi(b) \,.\, \sin^2 \Pi(b)$$

oder:

$$\{\operatorname{tg}^2 A + \sin^2 \Pi(b)\} \,.\, \{\operatorname{tg}^2 A - \operatorname{tg}^2 \Pi(b) \,.\, \cos^2 \Pi(a)\} = 0.$$

Ebenso ergiebt sich bei Wegschaffung von b:

$$\operatorname{tg}^2 \Pi(b) = \frac{\operatorname{tg}^2 A \,.\, \operatorname{tg}^2 B}{\sin^2 \Pi(a) - \operatorname{tg}^2 A \,.\, \operatorname{tg}^2 B} = \frac{\sin^2 A \,.\, \operatorname{tg}^2 \Pi(a)}{\sin^2 B},$$

also, wenn man $\operatorname{tg}^2 B$ durch $\sin^2 B$ ausdrückt:

$$\sin^4 B + \sin^2 B \{\operatorname{tg}^2 \Pi(a) - \cos^2 A \,.\, \sin^2 \Pi(a)\} = \\ = \operatorname{tg}^2 \Pi(a) \,.\, \sin^2 \Pi(a) \,.\, \cos^2 A,$$

oder:

$$\{\sin^2 B + \operatorname{tg}^2 \Pi(a)\} \,.\, \{\sin^2 B - \sin^2 \Pi(a) \,.\, \cos^2 A\} = 0.$$

S. 223, Z. 3—9 (356, Z. 7—13). Man vgl. hierzu das auf S. 246 f. Gesagte.

S. 223, Z. 7—2 v. u. (357, Z. 2—5). Das O. hat: „das eine mit der Hypotenuse a, den Katheten p, x und dem Winkel B gegenüber p, das andre mit der Hypotenuse b, den Katheten p, $c - x$ und dem Winkel A gegenüber p, wenn x eine positive Zahl ist (Fig. 121), oder mit dem Winkel $\pi - A$ gegenüber p, wenn x negativ ist (Fig. 122)." Da das zu der Fig. 122 (s. S. 202) nicht stimmt und auch an und für sich schon nicht ganz korrekt ausgedrückt ist, so habe ich in der Uebersetzung den

Text geändert und in Fig. 122 die Buchstaben a mit b und A mit B vertauscht (s. Fig. 122a).

S. 223, Z. 1 v. u. (357, Z. 6). Das O. hat Gl. (74) statt: (73).

S. 224, Z. 14 und 17 (357, Z. 8 und 6 v. u.). Das O. hat:

$$\Pi(c+\alpha) - \Pi(c-\alpha) \quad \text{statt:} \quad \Pi(c+\alpha) + \Pi(c-\alpha)$$

und: $e^{2c} + 1$ statt: $e^{2c} - 1$.

S. 224, Z. 1 v. u. (358, Z. 12). Das Pluszeichen ist gewählt, weil die Winkel $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$ alle spitz sind.

S. 225, Z. 3—6 (358, Z. 8—5 v. u.). Bezeichnet man den Nenner des Ausdrucks für $\cos \Pi(c)$ mit N, so wird:

$$1 - \cos A \,.\, \cos \Pi(b) \,.\, \cos \Pi(c) = \frac{1}{N} \sin \Pi(b) \,.\, \sin A,$$

also nach (86):

$$\{1 - \cos C \,.\, \cos \Pi(a) \,.\, \cos \Pi(b)\} \sin A = N \,.\, \sin \Pi(b)$$

oder:

$$\sin A \,.\, \cos \Pi(b) = \sin A \,.\, \cos C \,.\, \cos \Pi(a) + \sin \Pi(b) \,.\, \cos \Pi(a) \,.\, \cos A \,.\, \sin C.$$

S. 225, Z. 14 v. u. (359, Z. 6). Das O. hat (82) statt (84).

S. 225, Z. 14—10 v. u. Auch die Gl. (88) kann aus den Gleichungen (84) abgeleitet werden, denn es wird ähnlich wie im Texte:

$$e^{-2c} = \frac{e^{-a-\gamma} + \operatorname{tg} \frac{1}{2}B}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}B \,.\, e^{-a-\gamma}} \cdot \frac{e^{-a+\gamma} - \operatorname{tg} \frac{1}{2}B}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}B \,.\, e^{-a+\gamma}}$$

$$= \frac{e^{-2a} + e^{-a} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}B\,(e^{\gamma} - e^{-\gamma}) - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}B}{1 + e^{-a} \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2}B\,(e^{\gamma} - e^{-\gamma}) - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}B \,.\, e^{-2a}},$$

mithin wird nach S. 243, Gl. (I):

$$(88')\left\{\begin{aligned} \cos \Pi(c) &= \frac{(1 - e^{-2a})(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}B)}{(1 + e^{-2a})(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}B) + 2e^{-a} \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2}B(e^{\gamma} - e^{-\gamma})} \\ &= \frac{\cos \Pi(a)}{\cos B + \sin \Pi(a) \,.\, \sin B \,.\, \cot C}, \end{aligned}\right.$$

was eben die Gleichung (88) ist.

Damit sind die Gleichungen (83), (88), (89) unmittelbar aus (84) abgeleitet. Für die Gleichung (87) ist das offenbar nicht möglich, da sie drei Seiten aber blos einen Winkel enthält; sie folgt jedoch leicht aus (83) und (88). Drückt man nämlich in (88′) sin B vermöge (83) durch tg $\Pi(c)$, sin C und tg $\Pi(b)$ aus, so kommt:

$$\cos \Pi(c) = \frac{\cos \Pi(a) \,.\, \cos \Pi(c) \,.\, \sin \Pi(b)}{\sin \Pi(b) \,.\, \cos B \,.\, \cos \Pi(c) + \sin \Pi(c) \,.\, \sin \Pi(a) \,.\, \cos \Pi(b) \,.\, \cos C}.$$

Vertauscht man hier b mit c, B mit C und löst dann nach cos B und cos C auf, so gelangt man zu Gleichung (87).

S. 225, Z. 9—7 v. u. (359, Z. 10—12). Es wird nämlich:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}B\,(1 + e^{-2a}) + e^{-a}(e^{-\gamma} + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}B \,.\, e^{\gamma})}{e^{-a}(e^{\gamma} + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}B \,.\, e^{-\gamma}) - \operatorname{tg} \frac{1}{2}B\,(1 + e^{-2a})} = \cot^2 \tfrac{1}{2}A.$$

S. 225, Z. 5 v. u. (359, Z. 13). Eigentlich müsste es heissen: „mit den Nennern“, denn es wird auch mit $\sin^2 \frac{1}{2} A$ multiplicirt.

S. 228—234. Die Figuren 135—140 sind den G. A. entnommen, für die sie jedenfalls neu gezeichnet worden sind, wie schon ihr von den früheren Figuren abweichender Charakter vermuthen lässt; wenigstens sind diese Figuren weder in den zwei Exemplaren der K. G. S. enthalten, die die Kasaner Universitätsbibliothek besitzt, noch in den Exemplaren der Berliner Königlichen Bibliothek, der Kieler Universitätsbibliothek und der Münchner Königlichen Staatsbibliothek.

S. 230, Z. 12—14 (364, Z. 4 f.) In der That ergeben sich aus (100) durch Hinzunahme von (97) und (98) die beiden andern Gleichungen, die entstehen, wenn man in (100) die Seiten und Winkel des Dreiecks unter einander vertauscht.

S. 230, Z. 18—22 (364, Z. 9—13). Das O. hat unrichtig:

$$„2 \cos \tfrac{1}{2}(A + B) . \cos \tfrac{1}{2}(A - B) . \sin a . \sin b . \sin c + \\ + \sin(a + b)(\cos c - \cos(a - b)) = 0.$$

Ferner Gl. (46):

$$\cos \tfrac{1}{2}(A + B) . \cos \tfrac{1}{2}(A - B) + \\ + \sin(a + b) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(b + c - a) . \sin \frac{1}{2}(a + c - b)}{\sin a . \sin b . \sin c} = 0.“$$

Durch die in den Formeln angebrachten Aenderungen und durch den Zusatz: $[a > b \geq c]$ ist dieser Fehler berichtigt.

S. 231, Z. 14, 16 (365, Z. 8, 10). Im O. steht: $\cos C . \cos A$ und $\cos C . \cos B$ statt: $\cos C . \sin A$ und $\cos C . \sin B$.

S. 232, Z. 11 (366, Z. 6). Das O. hat ξ statt z.

S. 232, Z. 13, 14 (366, Z. 9, 10). Das O. hat:

$$\frac{y}{r} = \operatorname{tang} b, \quad \frac{z}{r} = \operatorname{tang} c, \quad \frac{r}{\eta} = \cos b, \quad \frac{r}{\xi} = \cos c.$$

S. 235, Z. 6, 5 v. u. (369, Z. 4). Auf die Gleichungen (63), (64), (65) wird jedenfalls verwiesen, weil diese in die Additionstheoreme für cos, tg und sin übergehen.

S. 235, Z. 2 v. u. (369, Z. 2 v. u.). Das O. hat unrichtig:

$$\cos \Pi(a) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \operatorname{tang} a.$$

III. Einige wichtige Formeln der Lobatschefskijschen Geometrie.

Für den Parallelwinkel $\Pi(x)$, der zu dem Lothe x gehört, gelten die Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \Pi(0) = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \Pi(\infty) = 0, \quad \Pi(-x) = \pi - \Pi(x) \\ \qquad \Pi(a) < \Pi(b) \quad \text{für} \quad a > b. \end{cases}$$

$$(2) \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}$$

$$(3) \qquad d\Pi(x) = -\sin \Pi(x) \,.\, dx$$

$$(4) \quad \begin{cases} \sin \Pi(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{\cosh x}, \quad \cos \Pi(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{tgh} x \\ \operatorname{tg} \Pi(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{1}{\sinh x}, \quad \cot \Pi(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x. \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \sin \Pi(x+y) = \dfrac{\sin \Pi(x) \,.\, \sin \Pi(y)}{1 + \cos \Pi(x) \,.\, \cos \Pi(y)} \\ \cos \Pi(x+y) = \dfrac{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)}{1 + \cos \Pi(x) \,.\, \cos \Pi(y)} \\ \operatorname{tg} \Pi(x+y) = \dfrac{\sin \Pi(x) \,.\, \sin \Pi(y)}{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)} \end{cases}$$

$$(6) \qquad \sin \Pi(-x) = \sin \Pi(x), \quad \cos \Pi(-x) = -\cos \Pi(x).$$

Für ein rechtwinkliges geradliniges Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln: A, B, $\frac{1}{2}\pi$ ist nach S. 20 und 220 ff.:

$$(7) \quad \begin{cases} \sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \,.\, \sin \Pi(b), \ \sin \Pi(c) = \operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{tg} B \\ \operatorname{tg} \Pi(c) = \operatorname{tg} \Pi(a) \,.\, \sin A, \quad \operatorname{tg} \Pi(c) = \operatorname{tg} \Pi(b) \,.\, \sin B \\ \cos \Pi(a) = \cos \Pi(c) \,.\, \cos B, \quad \cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \,.\, \cos A \\ \sin A = \sin \Pi(b) \,.\, \cos B, \quad \sin B = \sin \Pi(a) \,.\, \cos A \\ \operatorname{tg} A = \cos \Pi(a) \,.\, \operatorname{tg} \Pi(b), \quad \operatorname{tg} B = \cos \Pi(b) \,.\, \operatorname{tg} \Pi(a). \end{cases}$$

Setzt man hier: $A + B = \frac{1}{2}\pi - \Delta$, so wird nach S. 36:

$$(8) \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Delta = \cos \Pi(\tfrac{1}{2}a) \,.\, \cos \Pi(\tfrac{1}{2}b),$$

und Δ drückt den Inhalt des Dreiecks aus.

Man kann sich die Formeln (7) sehr leicht merken mit Hülfe einer Regel, die der Neperschen Regel für die sphärischen rechtwinkligen Dreiecke, vgl. S. 327, entspricht. Um diese Regel abzuleiten, denken wir uns an die Seiten des rechtwinkligen geradlinigen Dreiecks nicht die Längen a, b, c selbst geschrieben, sondern die dazu gehörigen Parallelwinkel, also wie in Fig. 57′. Wir erinnern ferner daran, dass nach S. 18 f. und 210 f. zu jedem rechtwinkligen geradlinigen Dreiecke ein andres gehört, das mit dem

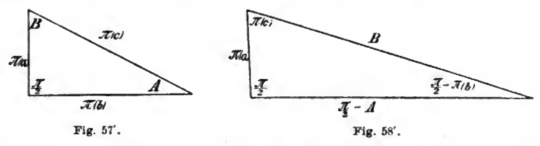


Fig. 57′. Fig. 58′.

ursprünglichen eine Kathete gemein hat. Schreibt man auch in dem neuen Dreiecke an jede Seite den zugehörigen Parallelwinkel, so bekommt man die Figur 58′. Das neue Dreieck wird also, wie schon auf S. 247 erwähnt ist, aus dem alten, Fig. 57′, dadurch erhalten, dass man eine Kathete, hier $\Pi(a)$, festhält, die beiden an dieser liegenden Stücke B und $\Pi(c)$ mit einander vertauscht und jedes der beiden von $\Pi(a)$ durch den rechten Winkel getrennten Stücke: $\Pi(b)$ und A durch das Komplement $\frac{1}{2}\pi - A$ und $\frac{1}{2}\pi - \Pi(b)$ des andern ersetzt.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Gleichungen für das rechtwinklige geradlinige Dreieck mit den Seiten und Winkeln: $a, b, c, A, B, \frac{1}{2}\pi$ nicht nur dann richtig bleiben, wenn man die Katheten und gleichzeitig die spitzen Winkel mit einander vertauscht, sondern auch dann, wenn man

$$\Pi(a) \quad B \quad \Pi(c) \quad A \quad \Pi(b)$$

der Reihe nach durch:

$$\Pi(a) \quad \Pi(c) \quad B \quad \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b) \quad \tfrac{1}{2}\pi - A$$

ersetzt. Man schreibe sich jetzt die Stücke des Dreiecks in einem Cyklus auf, wie folgt:

$$(9) \quad \ldots \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b) \quad B \quad \Pi(c) \quad A \quad \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a) \quad \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b) \quad B \ldots,$$

also derart, dass links und rechts von dem Parallelwinkel der Hypotenuse die beiden spitzen Winkel stehen und neben jedem spitzen Winkel das Komplement des Parallelwinkels der gegenüberliegenden Kathete. Dann bemerkt man sofort, dass jede der beiden Operationen, bei denen die Gleichungen für das rechtwinklige Dreieck richtig bleiben, den Cyklus (9) wieder liefert, aber unter Aenderung des Durchlaufungssinnes; wendet man aber beide Operationen nach einander an, so erhält man eine Verschiebung des Cyklus um eine Stelle nach rechts oder nach links. Da nun nach (7)

$$\sin \Pi(c) = \operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{tg} B = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a)\right) . \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b)\right)$$

ist, so ergiebt sich sofort, dass in dem Cyklus (9) der Sinus jedes Stückes gleich ist dem Produkte aus den Tangenten der beiden anliegenden Stücke, dagegen gleich dem Produkte aus den Cosinus der beiden nicht anliegenden Stücke.

Diese Regel liefert sofort alle Gleichungen (7) wieder; ihre Analogie mit der Neperschen Regel liegt auf der Hand, und es ist besonders bemerkenswerth, dass bei ihr die in der Neperschen Regel auftretenden Funktionen durch die komplementären ersetzt sind.

Es sei Fig. 59′ ein Viereck mit drei rechten Winkeln und dem spitzen Winkel $L = \Pi(l)$, es werde ferner $\Pi(t) = T$, $\Pi(u) = U$, $\Pi(v) = V$, $\Pi(w) = W$ gesetzt. Nach S. 26 giebt es dann zugleich ein rechtwinkliges

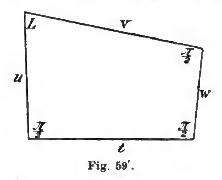


Fig. 59′.

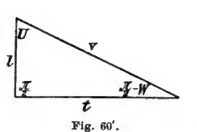


Fig. 60′.

Dreieck, Fig. 60′, mit den Seiten: t, l, v und den gegenüberliegenden Winkeln U, $\frac{1}{2}\pi - W$, $\frac{1}{2}\pi$. Nun ist aber auch umgekehrt das Viereck, Fig. 59′, durch das Dreieck, Fig. 60′, vollständig bestimmt, denn der spitze Winkel $\frac{1}{2}\pi - W$ liefert die Seite w, die zusammen mit der Hypotenuse v des Dreiecks zur Konstruktion des Vierecks hinreicht. Man erhält daher die Gleichungen zwischen den Stücken des Vierecks, Fig. 59′, wenn man die Gleichungen für das Dreieck, Fig. 60′, hinschreibt. Dazu aber hat man nach dem Früheren nur den Cyklus aufzuschreiben:

$$(10) \quad \ldots V \quad U \quad \tfrac{1}{2}\pi - T \quad \tfrac{1}{2}\pi - L \quad \tfrac{1}{2}\pi - W \quad V \quad U \quad \tfrac{1}{2}\pi - T \ldots,$$

und hier ist der Sinus jedes Stückes gleich dem Produkte aus den Tangenten (Cosinus) der beiden anliegenden (nichtanliegenden) Stücke. Demnach gelten für das Viereck, Fig. 59′, die Gleichungen:

$$(11) \quad \begin{cases} \cos L = \cot T \,.\, \cot W = \cos U \,.\, \cos V \\ \cos W = \cot L \,.\, \operatorname{tg} V = \sin T \,.\, \cos U \\ \sin V = \cot W .\, \operatorname{tg} U = \sin L \,.\, \sin T \\ \sin U = \operatorname{tg} V \,.\, \cot T = \sin L \,.\, \sin W \\ \cos T = \operatorname{tg} U \,.\, \cot L = \cos V \,.\, \sin W. \end{cases}$$

Für ein geradliniges Dreieck mit den Seiten a, b, c und den gegenüberliegenden Winkeln A, B, C gelten nach S. 21 und 223 ff. die Gleichungen:

$$(12) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \Pi(a) \,.\, \sin A = \operatorname{tg} \Pi(b) \,.\, \sin B \\ \cos A = \dfrac{\sin \Pi(a) - \sin \Pi(b) \,.\, \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a) \,.\, \cos \Pi(b) \,.\, \cos \Pi(c)} \\ \cos \Pi(a) = \dfrac{\sin A \,.\, \cos \Pi(c)}{\sin A \,.\, \cos B + \cos A \,.\, \sin B \,.\, \sin \Pi(c)} \\ \sin \Pi(a) = \dfrac{\sin B \,.\, \sin C}{\cos A + \cos B \,.\, \cos C}. \end{cases}$$

Der Inhalt Δ des Dreiecks ist nach S. 36 gleich: $\pi - A - B - C$; um ihn durch die Seiten a, b, c auszudrücken, hat man nach S. 270 die Formel:

$$(13)\qquad \sin \tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\sqrt{(e^s - 1)(e^{s-2a} - 1)(e^{s-2b} - 1)(e^{s-2c} - 1)}}{(e^a + 1)(e^b + 1)(e^c + 1)},$$

wo $s = a + b + c$ ist. Bezeichnet man die auf die Seite a gefällte Höhe mit h_a, so ist nach S. 70 und 313f.:

$$(14)\quad \cot \Pi(h_a) = \frac{2}{\sin C} \sqrt{\cos \tfrac{1}{2} S . \cos(\tfrac{1}{2}S - A) . \cos(\tfrac{1}{2}S - B) . \cos(\tfrac{1}{2}S - C)},$$

wo $S = A + B + C$.

Ist AB ein Gränzbogen mit den beiden parallelen Axen AA' und BB' (Fig. 61'), so ist nach S. 25 ff. Gl. (19), (27), (29), (30) und nach S. 33, Gl. (36) oder S. 189, Gl. (6):

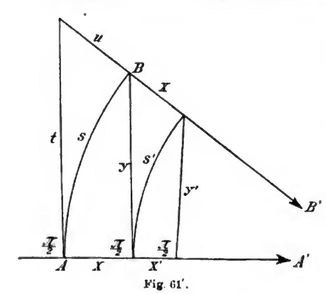


Fig. 61'.

$$(15)\quad \begin{cases} \cos \Pi(y) = e^{-x} . \cos \Pi(t) \\ \sin \Pi(y) = e^{-x} \end{cases}$$

$$(16)\quad s = \cot \Pi(y) = \cos \Pi(t)$$

$$(17)\quad s' = s . e^{-x}$$

$$(18)\quad \sin \Pi(t) = e^{-u}.$$

Die Richtigkeit der letzten Gleichung erkennt man sofort, wenn man beachtet, dass t, u und s zu einander in genau derselben Beziehung stehen, wie y, x und s'.

Beim Kreise vom Halbmesser r ist nach S. 29, Gl. (28) der Umfang:

$$(19)\qquad 2\pi . \cot \Pi(r) = \pi(e^r - e^{-r}),$$

und nach S. 37, Gl. (38) der Flächeninhalt:

$$(20)\qquad 4\pi . \cot^2 \Pi(\tfrac{1}{2}r) = \pi \left(e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}}\right)^2.$$

Bei der Kugel vom Halbmesser r ist nach S. 43, Gl. (45) die Oberfläche:

$$(21)\qquad 4\pi \cot^2 \Pi(r) = \pi(e^r - e^{-r})^2,$$

und nach S. 50f., Gl. (56), (58) der Rauminhalt:

$$(22)\qquad 2\pi \left(\frac{\cos \Pi(r)}{\sin^2 \Pi(r)} - r\right) = \frac{\pi}{2}(e^{2r} - e^{-2r} - 4r).$$

Die übrigen im Texte abgeleiteten Formeln wird man mit Hülfe des Sachregisters leicht auffinden können.

Lobatschefskijs Leben und Schriften.

Der folgenden Darstellung liegt in erster Linie die recht ausführliche Biographie Lobatschefskijs zu Grunde, die E. Janischefskij 1868 in Kasan veröffentlicht und die A. Potocki durch eine französische Uebersetzung allgemein zugänglich gemacht hat. Eine Reihe von Ergänzungen zu dieser Biographie enthielt schon die Rede, die A. Wassiljef zur hundertjährigen Jubelfeier des Geburtstages Lobatschefskijs 1893 in Kasan gehalten hat. Ausserdem hat aber Wassiljef eine beträchtliche Menge Stoff für eine neue Biographie gesammelt und hat mir, als er im Sommer 1897 Leipzig besuchte, Alles, was er gesammelt hatte, zur Verfügung gestellt, so dass ich mir Auszüge daraus machen konnte. Hierfür, sowie für zahlreiche andre Mittheilungen, die er mir auf brieflichem Wege gemacht hat, nicht minder für seine stete Bereitwilligkeit meine zahlreichen Anfragen über allerhand Einzelheiten zu beantworten — für alles das bin ich ihm zu ganz besonderem Danke verpflichtet. Einige Notizen habe ich endlich auch den kurzen Biographien entnommen, die den beiden Bänden der „Vollständigen Sammlung der geometrischen Arbeiten Lobatschefskijs", Kasan 1883 und 1886, beigegeben sind. Ueber die Einzelheiten und über alle sonst von mir benutzten Quellen geben die später folgenden Nachweisungen Aufschluss.

Im Ganzen fliessen die Nachrichten über den Lebensgang Lobatschefskijs ziemlich reichlich, denn Lobatschefskij hat mehrere Jahrzehnte lang einen ganz ungewöhnlichen Einfluss auf die Entwickelung der Universität Kasan ausgeübt, sodass die Geschichte dieser Hochschule während der ersten fünfzig Jahre ihres Bestehens zu einem wesentlichen Theile unter dem Zeichen Lobatschefskijs steht. Wir besitzen infolgedessen über Lobatschefskij eine Fülle von Nachrichten, die auf amtlichen Urkunden beruhen: leider beziehen sich diese jedoch fast alle nur auf äussere Ereignisse und auf seine höchst vielseitige und erfolgreiche amtliche Wirksamkeit; in die innere Entwickelung des Menschen und des Gelehrten gewähren sie so gut

wie gar keinen Einblick. Ueberhaupt ist es mit unsrer Kenntniss dieser Entwickelung ziemlich mangelhaft bestellt.

Die gedruckten Werke Lobatschefskijs liefern zwar hin und wieder, aber doch recht selten und immer nur eine sehr dürftige biographische Ausbeute, über den Menschen geben sie dagegen keinen Aufschluss und ebensowenig über die Entwickelung seiner Ideen, namentlich verrathen sie nichts über den Ursprung und die allmähliche Ausgestaltung seiner geometrischen Ansichten. Erscheinen doch gerade seine geometrischen Untersuchungen gleich in der ersten von ihm veröffentlichten Fassung so fertig und in ihrer Art vollkommen, dass sich nirgends Spuren der vorhergegangenen Entwickelung bemerklich machen. Um so mehr muss man beklagen, dass der handschriftliche Nachlass Lobatschefskijs verschollen und allem Anscheine nach für immer verloren ist. Ein Glück ist es noch, dass wir durch gewisse, im Verlaufe unsrer Darstellung zu erwähnende Funde wenigstens einigermassen in den Stand gesetzt sind, uns eine Vorstellung davon zu machen, wie Lobatschefskij im Laufe der Jahre zu seiner nichteuklidischen Geometrie gekommen ist, so dass wir also doch nicht ganz auf blose Vermuthungen angewiesen sind. Aber auch hier geht es wie so oft: einzelne Fragen werden durch solche Funde beantwortet, so und so viele andre nicht, und neue Fragen treten auf, deren Beantwortung schwerlich jemals zu erwarten ist.

Briefe Lobatschefskijs besitzen wir nur äusserst wenige, und diese wenigen sind durchweg geschäftlichen Inhalts; auch aus Briefen seiner Freunde lässt sich nichts über sein Wesen und seinen Charakter entnehmen, denn solche Briefe sind mir wenigstens nicht bekannt geworden. Ziemlich dürftig ist endlich, was uns mündliche Ueberlieferung an Nachrichten über seine Persönlichkeit erhalten hat.

Unter diesen Umständen wird man es begreifen, wenn das Lebensbild, das ich zu zeichnen versuche, in mancher Beziehung recht unvollkommen ausfällt und gar manche Frage offen lässt.

Kapitel I.

Lobatschefskijs erste Jugend und Universitätsjahre. Sein Lehrer Bartels.

Nikoláj Iwánowitsch Lobatschéfskij ist am 22. Oktober (2. November) 1793 im Gouvernement Nishnij-Nówgorod geboren, nach der einen Angabe in der Stadt Nishnij-Nowgorod selbst, nach der andern im Distrikte Makárjef. Sein Vater hiess Iwán Maxímowitsch Lobatschéfskij, die Mutter Praskówja Alexándrowna. Der Vater hatte, soviel man weiss, eine ziemlich bescheidene Anstellung als Architekt oder Feldmesser; er war aus Polen eingewandert, muss aber zur orthodoxen Kirche übergetreten sein, denn man hat feststellen können, dass beide Aeltern während der Jahre 1792—95 in Nishnij-Nowgorod gebeichtet haben. Ausser unserm Nikolaj hat ihm seine Gattin noch zwei Söhne geboren, einen älteren Alexander und einen jüngeren Alexéj.

Schon 1797 starb der Vater, und die Mutter scheint bald darauf nach Kasan gezogen zu sein, wo sie mit ihren drei Söhnen in sehr beschränkten Verhältnissen lebte. Es muss daher für sie eine grosse Erleichterung gewesen sein, dass sie ihre Söhne auf dem Kasaner Gymnasium unterbringen konnte, wo diese auf Staatskosten erzogen wurden. Nikolaj insbesondre wurde im November 1802 in das Gymnasium aufgenommen und hat sich während seiner ganzen Schulzeit durch seine Leistungen und sein Betragen ausgezeichnet. Dass er gegen Ende der Schulzeit die Mathematik und das Lateinische mit besondrer Vorliebe betrieben habe, wird ausdrücklich bezeugt.

Am 14. (26.) Februar 1805 wurde die neugegründete Universität Kasan eröffnet, an der unserm Nikolaj später eine so lange und so erfolgreiche Wirksamkeit vergönnt sein sollte. Die Anfänge der Universität waren äusserst bescheiden. Mit der Abhaltung der Vorlesungen wurden zunächst einige Lehrer des Gymnasiums beauftragt, und zum Vorsitzenden des Kollegiums der Docenten wurde Jakófkin, der Rektor des Gymnasiums, ernannt. Die Vorlesungen beschränkten sich unter diesen Umständen zum Theil auf eine Wiederholung des schon auf dem Gymnasium behandelten Stoffs, während die Fächer, die über die Stufe des Gymnasiums hinausgingen, nur sehr flüchtig und mangelhaft behandelt wurden. Erst nach Verlauf zweier Jahre wurde das anders, als der Kurator der Universität, Rumófskij, nach und nach eine Anzahl Professoren von auswärts berief, namentlich

Deutsche. Freilich war auch dann noch der Universitätsunterricht ziemlich erschwert, denn von diesen deutschen Professoren verstand nur einer, Namens Fuchs, das Russische, und die Vorlesungen wurden daher im Allgemeinen lateinisch gehalten; doch machte das gerade bei den mathematischen Fächern, die hier allein für uns in Betracht kommen, verhältnissmässig am wenigsten aus.

Sehr bald nach der Eröffnung der Universität fragte man bei den Aeltern der Schüler des Gymnasiums an, ob sie bereit wären, ihre Söhne nach Beendigung des Gymnasialkurses in die Universität eintreten zu lassen; diese sollten da auf Staatskosten unterhalten werden, wenn sie sich verpflichteten, nachher sechs Jahre lang der Universität zu dienen. Unter denen, die auf dieses Anerbieten eingingen, war auch Lobatschefskijs Mutter und zwar hatte sie ihr Antwortschreiben eigenhändig geschrieben, was als Beweis einer bei Frauen ihres Standes ungewöhnlichen Bildung gelten muss.

Nikolajs älterer Bruder Alexander wurde sofort in die Universität aufgenommen, doch hat er sie nicht lange besucht, denn schon 1807 nahm er sich das Leben. Nikolaj selbst wurde im Juli 1806 geprüft, aber vorläufig auf dem Gymnasium gelassen, um sich noch weiter im Lateinischen zu vervollkommnen. Im December 1806 unterzog er sich nochmals einer Prüfung und wurde nunmehr am 9. (21.) Januar 1807 als Student an der Universität eingeschrieben.

Zum Glücke für Lobatschefskij war der mangelhafte Zustand, in dem sich der Unterricht an der Universität Kasan bisher befunden hatte, nicht mehr von langer Dauer. Schon in den Jahren 1807 und 1808 wurde der Lehrkörper der Universität durch die Berufung einer Reihe deutscher Professoren ergänzt, und namentlich erhielt die reine Mathematik in Bartels, der im Februar 1808 ankam, einen Vertreter, wie man ihn nur wünschen konnte.

Da Bartels unzweifelhaft der Mann ist, dem Lobatschefskij für seine mathematische Bildung am Meisten zu verdanken hat, so müssen wir auf ihn etwas ausführlicher eingehen.

J. M. C. Bartels, geboren am 12. August 1769 in Braunschweig, hatte sich aus sehr beschränkten Verhältnissen emporgearbeitet und theils auf eigne Hand aus Büchern, theils unter der Anleitung von Pfaff in Helmstedt und von Kästner in Göttingen gründliche mathematische Kenntnisse erworben. Nachdem er dann von 1794 bis 1804 in der Schweiz als Lehrer gewirkt hatte, war er 1805 einer Aufforderung seines Landesherrn, des Herzogs Karl Wilhelm Ferdinand, gefolgt und nach Braunschweig zurückgekehrt, wo er, bis über seinen künftigen Wirkungskreis entschieden sein würde, ein ansehnliches Wartegeld

erhielt und sich ganz seinen Studien widmen konnte. In derselben Lage befand sich damals Gauss, der sich seit dem Jahre 1798 mit Unterstützung des Herzogs in Braunschweig aufhielt. Bartels und Gauss kannten einander schon von früher her, denn Bartels war von 1783 an fünf Jahre lang an einer der beiden Braunschweigischen Schreib- und Rechenschulen der Gehülfe des Lehrers gewesen, gerade in dieser Schule hatte damals Gauss seine erste Bildung erhalten, und der um acht Jahre ältere Bartels hatte mit ihm Freundschaft geschlossen. In den folgenden Jahren hatten beide wenigstens von Zeit zu Zeit Briefe gewechselt und jetzt verkehrten sie wieder auf das Freundschaftlichste mit einander, wobei freilich Gauss, der damals schon durch seine arithmetischen und astronomischen Arbeiten berühmt war, mehr der gebende als der empfangende Theil gewesen sein wird. Der Herzog beabsichtigte für Gauss eine Sternwarte zu errichten und im Anschluss daran eine höhere mathematische Lehranstalt zu schaffen, an der Bartels als Lehrer thätig sein sollte. Durch den Krieg von 1806 wurden jedoch alle diese Pläne vereitelt: der Herzog starb auf dem Rückzuge von der Schlacht bei Jena, und Gauss und Bartels verloren die ihnen gewährte Unterstützung. Infolgedessen ging Gauss 1807 nach Göttingen, und Bartels siedelte in demselben Jahre nach Kasan über. Er hatte nämlich schon früher durch Vermittelung des ständigen Sekretärs der Petersburger Akademie, Nikolaus Fuss, eine Berufung nach Kasan erhalten, diese aber wegen seiner Verpflichtungen gegen den Herzog abgelehnt; unter den jetzigen veränderten Verhältnissen knüpfte er wieder mit dem Kurator Rumofskij an und erhielt im Juni 1807 seine Ernennung, im Oktober reiste er ab.

Auch nach ihrer Trennung blieben Gauss und Bartels in brieflichem Verkehre, allerdings mit grossen Unterbrechungen. Leider sind uns nur die Briefe von Bartels an Gauss erhalten, diese aber zeigen, dass ihr Briefwechsel blos rein persönliche Angelegenheiten betraf und mathematische Fragen gar nicht berührte. Für uns sind namentlich zwei Stellen aus Briefen von Bartels von Interesse. Unterm 6. (18.) Juli 1808 schreibt dieser aus Kasan: „Mein Wirkungskreis ist hier angenehmer als ich erwarten durfte. Die meisten meiner Zuhörer sind in der Mathematik sehr gut vorbereitet. Zwei derselben studiren Ihre Disquisitiones.“ Andrerseits heisst es unterm 14. (26.) April 1821 aus Dorpat, wo Bartels von 1821 ab bis zu seinem Tode, am 7. (19.) December 1836, die Lehrstelle für Mathematik bekleidete: „Mehr als ein Jahrzehnt ist verflossen, dass wir von einander auch nicht eine Zeile gesehen haben. Einen Brief erhielt ich bald nach meiner Ankunft in Kasan. . . . Ich reiste den 6. December von Kasan

ab und kam den 7. Januar hier an.... In Rücksicht letzterer [der Zuhörer] dürfte ich wohl etwas mehr Sinn für mathematische Wissenschaften wünschen. In Kasan war ich ungeachtet der übrigen nicht ganz angenehmen Verhältnisse in dieser Hinsicht immer sehr glücklich."

Ergänzt werden diese Briefstellen durch einige Aeusserungen in der Vorrede zu dem ersten und einzigen Bande der „Vorlesungen über mathematische Analysis", die Bartels später in Dorpat ausgearbeitet hat. Ueber Kasan sagt er da: „Zu meiner grossen Freude fand ich ungeachtet der damals noch kleinen Zahl der Studierenden ungemein viel Sinn für das Studium der mathematischen Wissenschaften, so dass ich in meinen Vorlesungen über höhere Analysis auf wenigstens zwanzig Zuhörer rechnen durfte und sich allmählich eine kleine mathematische Schule bildete, aus welcher eine Menge geschickter mathematischer Lehrer für die Gymnasien und Universitäten Russlands, besonders des Kasanischen Lehrbezirks, hervorgegangen sind, die nun schon seit zwanzig Jahren das Studium der mathematischen Wissenschaften noch mehr verbreitet haben." Dagegen heisst es über Dorpat: „Obwohl ich hier ungeachtet der bereits grössern Menge der Studierenden als in Kasan, weit weniger Liebhaber für das mathematische Studium vorfand, und ich meine Vorträge grösstentheils auf Elementar-Mathematik beschränken musste, so hat doch allmählich der Sinn für diese Wissenschaft auch hier zugenommen, und ich darf schon seit mehrern Jahren für meine Vorlesungen über höhere Mathematik auf wenigstens 10—12 Zuhörer rechnen."

Aus dem Gesagten wird man schon schliessen, dass Bartels ein vorzüglicher Lehrer gewesen sein muss, gerade der richtige Mann, um an einer im Entstehen begriffenen Universität einen Stamm gründlich durchgebildeter Mathematiker heranzuziehen. Als einen solchen zeigen ihn auch seine bereits erwähnten „Vorlesungen über mathematische Analysis"; diese sind äusserst klar geschrieben, verrathen überall einen scharfen Kopf und ragen durch das Streben nach möglichster Strenge der Beweise hervor. Ein wirklich origineller mathematischer Denker scheint er dagegen nicht gewesen zu sein, wenigstens hat er sich niemals durch irgend eine mathematische Entdeckung bekannt gemacht; was er ausser den „Vorlesungen" veröffentlicht hat, ist äusserst wenig, und auch diese sind mehr durch Gediegenheit als durch Originalität ausgezeichnet. Seinen Schülern in systematischer Darstellung mitzutheilen, was er selbst wusste, und dieses Wissen dürfen wir nicht gering anschlagen, sie zum Studium der mathematischen Litteratur zu befähigen und mit den klassischen Werken bekannt zu machen, also mit Eulers Differential- und Integralrechnung, mit Lagranges ana-

lytischer Mechanik, mit der Mécanique céleste des Laplace, mit Monges geometrischen Untersuchungen und mit den Gaussischen Disquisitiones arithmeticae — das war sein Beruf und seine Gabe. So hat er jederzeit seinen Platz im Leben ausgefüllt, und die Erfolge seiner Lehrthätigkeit zeigen, dass er nicht vergebens gewirkt hat.

Etwas später als Bartels, nämlich im September 1808, kam der bisherige Göttinger Privatdocent Renner nach Kasan und übernahm die Professur für angewandte Mathematik, also namentlich die Mechanik, wobei er als Adjunkten den Magister Nikólskij erhielt. Renner, geboren 1780, wird als ein guter Mathematiker und Lateiner gerühmt, hat auch einiges Mathematische veröffentlicht; es scheint jedoch, dass sein Einfluss auf die Entwickelung der mathematischen Fähigkeiten Lobatschefkijs weit geringer war als der von Bartels. Zwei Jahre nach Bartels und Renner, im März und im Oktober 1810, kamen noch Joseph Johann Littrow (1781—1840) und Franz Xaver Bronner (1758—1850) nach Kasan, jener als Professor der Astronomie, dieser als Professor der Physik. Auch sie sind noch Lehrer Lobatschefskijs gewesen, wie wir nachher hören werden. Jedenfalls war vom Jahre 1810 ab die physiko-mathematische Fakultät der Universität Kasan mit Lehrkräften so gut versorgt, wie damals kaum eine deutsche Universität.

Doch kehren wir zu unserm Studenten zurück.

In dem Jahre 1808 steht Lobatschefskij noch nicht auf der Liste derer, die sich mit Mathematik beschäftigen wollen; nach der Angabe des Rektors bereitete er sich vielmehr auf das Studium der Medicin vor. Es ist deshalb auch zweifelhaft, ob er unter den beiden war, von denen Bartels im Juli 1808 erzählt, dass sie die Gaussischen Disquisitiones studirten. Aber schon im Jahre 1809 waren seine Fortschritte in der Mathematik so gross, dass er am 31. Mai (12. Juni) von seinen Mitstudenten zum Kammerstudenten gewählt wurde und dass die Wahl die Bestätigung der Vorgesetzten erhielt. Diese Kammerstudenten hatten eine Art Aufsicht über die jüngern Studenten zu führen und genossen dafür gewisse besondre Vergünstigungen. Lobatschefskij muss aber damals ein gehöriges Mass jugendlichen Uebermuthes besessen und einen starken Trieb gefühlt haben, diesem Uebermuthe nach aussen Luft zu machen. Während seine Führung bisher ohne Tadel gewesen war, sodass der Unterinspektor der Studenten, ein gewisser Kóndyref, stets sehr günstig über ihn berichtet hatte, beging er jetzt allerhand thörichte Streiche. Unter andern liess er einmal Nachts um elf Uhr eine Rakete steigen, was ihm einige Tage Karzer einbrachte, namentlich aber betheiligte er sich an den Neckereien,

die sich die Studenten gegen den selbst noch sehr jugendlichen Kondyref erlaubten. Von 1810 ab hören daher in Kondyrefs Berichten die Klagen über Lobatschefskijs Betragen gar nicht mehr auf, und als sich dieser in den Weihnachtsferien 1810 den Streichen der jüngern Studenten gegenüber zu nachsichtig gezeigt hatte, verlor er die Stelle als Kammerstudent. Trotzdem wagte er es im Januar 1811 verbotner Weise einen Maskenball zu besuchen und, was schlimmer war, er that Aeusserungen, die ihn, wahrscheinlich unverschuldet, in den Geruch des Atheismus brachten. Doch wird wenigstens ausdrücklich bezeugt, dass keine dieser Jugendthorheiten geeignet war, die Lauterkeit seines Charakters zweifelhaft zu machen, und dass man ihm niemals etwas Unehrenhaftes oder Unsittliches nachsagen konnte.

Die ungünstigen Berichte Kondyrefs waren durch den Rektor Jakofkin an den Kurator weitergegeben worden, und dieser hatte unter dem Ausdrucke des lebhaftesten Bedauerns, dass Lobatschefskij „seine glänzenden Eigenschaften so verdunkle" gedroht, er werde, falls die Klagen sich wiederholten, genöthigt sein, dem Unterrichtsminister Anzeige zu machen. Unter diesen Umständen und namentlich bei der ausgesprochenen Missgunst des damals ziemlich einflussreichen Rektors Jakofkin hätte Lobatschefskij vielleicht seinen jugendlichen Uebermuth theuer bezahlen müssen, wenn er nicht an Bartels, Littrow und Bronner einen sichern Rückhalt gehabt hätte. Diese hatten gleich von Anfang an seine aussergewöhnliche Begabung erkannt und waren von seinen Fortschritten und Leistungen so befriedigt, dass sie in ihren Berichten an den Senat der Universität und an den Kurator immer des Lobes voll waren. Sie würden wohl schon gegen die Klagen Kondyrefs Einspruch erhoben haben, wenn sie dessen russisch geschriebene Berichte hätten lesen können. Bald hatten sie jedoch eine Gelegenheit, nachdrücklich und mit gutem Erfolge für Lobatschefskij einzutreten.

Am 7. (19.) Juli 1811 beschloss der Senat dem Kurator Vorschläge zu machen, welche Studenten zu „Kandidaten" ernannt werden sollten. Auf der Liste stand ausser drei andern der jüngere Bruder des unsrigen, Alexej Lobatschefskij, der Kandidat der Chemie und Technologie werden sollte. Unser Nikolaj war nicht darunter, sondern es heisst in dem Sitzungsprotokolle: „Einige Mitglieder des Senats haben darauf hingewiesen, dass man allerdings Nikolaj Lobatschefskij des Grades eines Kandidaten würdig erachten könnte, wenn man blos auf seine bemerkenswerthen Fortschritte und auf seine grosse Begabung für die Mathematik Rücksicht zu nehmen hätte. Aber seine schlechte Führung steht dem entgegen, und nach der Ansicht

des inspicirenden Professors und mehrerer andrer Mitglieder würde es ungerecht sein und dem Reglement widersprechen, wollte man ihm diese Beförderung zu Theil werden lassen; man zieht daher vor, abzuwarten, bis sich seine Führung gebessert haben wird." Bevor jedoch diese Vorschläge dem Kurator übersandt waren, fand schon am 11. (23.) Juli eine neue Senatssitzung statt, in der man sich dafür entschied, jene vier Studenten gleich zu Magistern vorzuschlagen, und Bartels, Littrow und Bronner, die noch von dem Professor Hermann unterstützt wurden, konnten diesmal durchsetzen, dass auch Nikolaj gleich mit zum Magister vorgeschlagen wurde. Allerdings musste dieser an dem genannten Tage vor dem Senate erklären, dass er seine Vergehen bereue und sich vollständig bessern wolle. Dafür beschloss aber der Senat, ihn unter die Zahl der Magister aufzunehmen, „damit er nicht durch übermässige Strenge zur Verzweiflung gebracht und getödtet werde, er, dessen Talente und Erfolge die schmeichelhaftesten Hoffnungen für die Universität erwecken". Unterm 3. (15.) August bestätigte der Kurator Rumofskij die gemachten Vorschläge.

Man muss übrigens hierbei berücksichtigen, dass damals und noch bis zum Jahre 1819 an der Universität Kasan keine bestimmten Vorschriften über die Verleihung der drei akademischen Grade: Kandidat, Magister und Doktor bestanden, und dass infolgedessen Senat und Kurator vollkommen freie Hand hatten, welche Anforderungen sie bei der Verleihung stellen wollten.

Der Senat arbeitete nunmehr ein Regulativ aus, in dem die Pflichten der Kandidaten und Magister genau festgesetzt wurden. Darnach waren insbesondre die Magister beauftragt, die von den Professoren gehaltenen Vorlesungen mit den Zuhörern zu wiederholen und nicht Verstandenes zu erklären, auch mussten sie unter Umständen abwesende Professoren vertreten; ferner hatten sie bei der Redaktion der Kasaner Nachrichten (Kasánskija Iswjéstija) mitzuwirken, die 1812 zum Organe der Universität erhoben wurden und die ausser amtlichen Bekanntmachungen auch Mittheilungen über neue Entdeckungen, über litterarische Fragen und dergleichen enthielten und dadurch zur Hebung der allgemeinen Bildung in dem Gouvernement beitragen sollten. Vor allen Dingen aber waren die Magister verpflichtet, sich unter der besondern Anleitung einzelner Professoren in ihrem eignen Fache weiter zu vervollkommnen, und über den Erfolg dieser Studien mussten die betreffenden Professoren jedes Semester dem Senate der Universität Bericht erstatten. Endlich wurde in Verbindung mit der Universität ein pädagogisches Institut errichtet, dem der Professor Bronner vorstand und dem alle Kandidaten und Ma-

gister angehören mussten, um sich da auf ihren künftigen Lehrerberuf vorzubereiten.

Es entsprach nur diesen Bestimmungen, dass Lobatschefskij von jetzt ab wöchentlich mehrere Stunden auf der Wohnung von Bartels zubrachte, um unter dessen Anleitung seine Ausbildung in der höhern Mathematik zu vollenden. Insbesondre beschäftigte er sich dort während der ersten Hälfte des Jahres 1812 mit der Laplaceschen Mécanique céleste und hatte dabei noch einen Genossen in dem Magister Símonof, dem spätern Professor der Astronomie an der Universität Kasan. Nähere Auskunft über diese Studien giebt der folgende von Bartels an den Senat erstattete Bericht, dessen Wortlaut ich Wassiljef verdanke:

„Concilio Honoratissimo Universitatis Casanensis
Professor Bartels.

„Nemo Vestrum, Viri clarissimi et honoratissimi, nescit me initio hujus cursus praeteriti academici officium D^{orum} Magistrorum Lobatschevsky et Simonov in scientiis mathematicis amplius excolendorum et hac de re nonnunquam ad vos referendi suscepisse. Quam relationem jam eo libentius facio, quo felicior meae operae successus fuit. Praelectionibus meis privatis, in quibus maximam partem 1^{mi} et aliquam 2^{di} tomi egregii illius operis, cujus auctor Celeberrimus la Place est, explicavi, D^{ni} Magistri non solum cum singulari diligentia interfuerunt sed quacunque etiam occasione proficiendi optime usi sunt. Elaborationes huic meae relationi adjunctae ad Mechanicam coelestam spectantes dicto meo probando inservient.

„E specimine D^{ni} Simonovi quod priori quidem mea eo de argumento instructione in usum adhibita proprio tamen marte composuit, etsi demum hodie mihi traditum non nisi fugitivo oculo percurrere potui, manifestum fore spero, eum in Analysi et Mechanica sublimiori probari posse id quod eo magis laudandum est, quod astronomiae practicae duce D^{no} honor. Coll. Littrow eximiam operam dat.

„Quamvis autem D. Simonov rerum mathematicarum bene expertus sit, tamen a D^{no} Lobatschevski praesertim in partibus subtilioribus superatur. Ex hujus enim commentatione quam absque ullo subsidio, opus ill. la Place si excipias, elaboravit, intelligitur, eum res in illa tractatas non solum penetrasse, sed etiam ideis ipsi propriis exornare scivisse. Pluribus in locis hujus brevis commentationis praestantissimi ingenii mathematici, quod illustre nomen aliquando non poterit non assequi, indicia inveniuntur, quae exponere hujus loci non esse videtur.

„Rogo honoratissimum Consilium ut et hanc meam relationem et ambas commentationes ad Virum Excellentissimum, Dominum Curatorem transmittendas curet. Scripsi Casani die 10. Juli 1812.

Martinus Bartels Prof. o. p. Mathes.“

Die Abhandlung Lobatschefskijs, von der Bartels hier spricht, ist wahrscheinlich eine ungedruckt gebliebene, die den Titel trug: Teoríja elliptítscheskawa dwishénija njebésnych tjel (Theorie der elliptischen Bewegung der Himmelskörper).

Ebenso wie die Mécanique céleste studirte Lobatschefskij unter der Anleitung von Bartels auch die Disquisitiones arithmeticae von Gauss, und das Ergebniss dieser Studien war eine Abhandlung: O rasrjeschénii algebraítscheskawa urawnjénija: $x^n - 1 = 0$ (Ueber die Auflösung der algebraischen Gleichung: $x^n - 1 = 0$), die er im Jahre 1813 der physiko-mathematischen Abtheilung der Universität vorlegte. Er behandelt darin den Fall, dass n die Form $4m + 1$ besitzt, und giebt allgemeine Ausdrücke für die Koefficienten der Gleichung m-ten Grades, auf die sich die Gleichung: $x^n - 1 = 0$ durch Ausziehen von Quadratwurzeln zurückführen lässt. Auch diese Arbeit blieb zunächst ungedruckt, Lobatschefskij hat sie aber später in sein Lehrbuch der Algebra aufgenommen, wo sie in Kapitel 16, § 215 enthalten ist.

Nach alledem müssen wir den Einfluss, den Bartels auf die Entwickelung der mathematischen Fähigkeiten Lobatschefskijs ausgeübt hat, recht hoch anschlagen. Bartels ist es jedenfalls gewesen, der in seinem Schüler den Sinn für mathematische Strenge geweckt und genährt hat; unter seiner Leitung wird sich dieser die ungewöhnliche Beherrschung des mathematischen Rechenapparates angeeignet haben, die er in seinen Schriften überall verräth. Auch hat Lobatschefskij lebenslang das Andenken an seinen Lehrer hoch in Ehren gehalten.

Neben den rein mathematischen Studien bei Bartels beschäftigte sich Lobatschefskij unter Littrow auch mit der praktischen Astronomie; im Jahre 1811 beobachtete er zusammen mit Simonof den damaligen grossen Kometen, und diese Beobachtungen wurden von Littrow in den Kasaner Nachrichten veröffentlicht.

Ausserdem war Lobatschefskij auch ein eifriges Mitglied des von Bronner geleiteten pädagogischen Instituts, und es ist anzunehmen, dass er durch den sehr vielseitig und namentlich auch philosophisch gebildeten Bronner in die Philosophie Kants eingeführt worden ist, dessen Lehre von der Apriorität der geometrischen Sätze er später einen so harten Stoss versetzen sollte.

Kapitel II.

Lobatschefskijs erste Lehrthätigkeit. Die Zustände an der Universität. Erste Versuche auf dem Gebiete der Geometrie.

In das Jahr 1812 fällt der Anfang der langjährigen Lehrthätigkeit Lobatschefskijs, denn er erhielt da den Auftrag, einer Anzahl von Beamten, die sich auf eine seit 1809 eingeführte Prüfung vorbereiten sollten, zwei Stunden wöchentlich über Arithmetik und Geometrie vorzutragen. Da sich sein Vortrag durch Einfachheit und Klarheit auszeichnete, so betraute man ihn schon im folgenden Jahre damit, an der Universität selbst neben seinem bisherigen Lehrer Bartels Vorlesungen über diese Gegenstände zu halten, und am 26. März (7. April) 1814 wurde er auf die Empfehlung von Bartels und Bronner zum Adjunkten ernannt, gleichzeitig mit Simonof und zwei andern Magistern.

Die Verhältnisse an der Universität hatten sich mittlerweile recht unerquicklich gestaltet. Der schon früher erwähnte Jakofkin, der bei der Gründung der Universität mit der Verwaltung der Rektorgeschäfte beauftragt worden war, hatte nämlich versucht, an der Universität ebenso unbeschränkt zu herrschen wie am Gymnasium, dessen Direktion er gleichzeitig auch noch führte. Das aber wollten sich die Professoren nicht gefallen lassen und am allerwenigsten die vom Auslande gekommenen wie Bartels, Bronner, Littrow und andre. Die Folge waren fortwährende Streitigkeiten im Professorenkollegium und allgemeine Unzufriedenheit, zumal sich der Kurator Rumofskij immer auf die Seite Jakofkins stellte. Im Jahre 1810 hatte zwar das Ministerium die vorläufige Ordnung der Universitätsverwaltung durch eine endgültige nach dem Muster der ältern Universitäten ersetzen wollen und hatte deshalb die Wahl eines Rektors und von Dekanen verfügt, aber Jakofkin hatte zu hintertreiben gewusst, dass die Gewählten ihr Amt antraten, obwohl seine Unbeliebtheit dadurch sehr deutlich zu Tage getreten war, dass keine der Wahlen auf ihn fiel.

Als 1813 nach Rumofskijs Tode ein neuer Kurator Namens Saltykóf ernannt wurde, da war es allerdings mit Jakofkins Einfluss zu Ende, und so konnte die neue Universitätsverfassung wirklich ins Leben treten; aber der allgemeine Zustand besserte sich dadurch keineswegs. Der zum Rektor gewählte Professor der Anatomie Braun befand sich nämlich in fortwährender Uneinigkeit mit dem Kurator,

und die Kämpfe zwischen dem Professorenkollegium und dem Kurator wurden daher nur noch heftiger. Namentlich war über die Beförderungen gar keine Einigkeit zu erzielen, da sich der Kurator nicht um die Rechte kümmerte, die der Senat nach dem Universitätsstatute in dieser Beziehung besass. So geschah zum Beispiel die Ernennung Lobatschefskijs und Simonofs zu Adjunkten auf den blosen Antrag des Kurators unmittelbar durch den Minister, ohne dass der Senat sie vorgeschlagen hatte, und als im April 1816 der Kurator dem Senat anheimstellte, die beiden zu ausserordentlichen Professoren zu wählen, lehnte das die Mehrheit des Senats ab, weil die im Statute vorgesehene Zahl von vier ausserordentlichen Professoren voll sei. Trotzdem verfügte der Minister am 7. (19.) Juli 1816 ihre Ernennung zu ausserordentlichen Professoren, „in Anbetracht ihrer vom Kurator bezeugten Kenntnisse und Fähigkeiten“. Umgekehrt wollte der Kurator, um zu sparen, freigewordene Stellen ordentlicher Professoren nur mit ausserordentlichen besetzt wissen, und als in demselben Jahre der Senat den ausserordentlichen Professor Sólnzef zum ordentlichen wählte, wurde der Wahl die Bestätigung versagt.

Zu dem höchst unbefriedigenden Verhältnisse zwischen dem Senat und dem Kurator kamen noch, durch gegenseitige Eifersucht und durch Brodneid veranlasst, äusserst widerwärtige Zänkereien einzelner Professoren untereinander, und leider zeigten sich dabei verschiedene der deutschen Professoren keineswegs in vortheilhaftem Lichte. Ueber diesen ewigen Zänkereien vernachlässigten nicht wenige Professoren ihren Unterricht in gröblichster Weise, und jedenfalls konnte von einem gedeihlichen Zusammenwirken aller keine Rede sein.

Die eben geschilderten Zustände an der Universität Kasan konnten selbstverständlich dem Unterrichtsministerium nicht verborgen bleiben und führten endlich im Jahre 1819 zu einer Revision der Universität, nachdem der Kurator Saltykof schon im September vorher abgegangen war.

Lobatschefskij hielt sich während des hier besprochenen Zeitraums ganz zurück und nahm an den erwähnten Streitigkeiten gar nicht Theil. Allerdings lag das wohl mit daran, dass seine Gesundheit zu wünschen übrig liess; wenigstens unternahm er im Sommer 1817 zu deren Herstellung eine Reise, die ihn nach seinem heimathlichen Gouvernement Nishnij-Nowgorod und nach den Schwefelbädern von Sérgijefsk im Gouvernement Samára führte — auch noch später, im Sommer 1819 suchte er diese Bäder auf. Vor allen Dingen aber widmete er sich unausgesetzt seiner Lehrthätigkeit und wissenschaftlichen Arbeiten. Er konnte das um so mehr, als er während

der ersten Jahre nach seinem Eintritt in den Lehrkörper der Universität keine andern Verpflichtungen hatte; erst im Jahre 1818 traten solche Verpflichtungen an ihn heran, denn er wurde zum Mitgliede des an der Universität bestehenden Schulausschusses ernannt, dem die Gymnasien und alle andern Schulen des Kasaner Lehrbezirks unterstellt waren.

Was seine Lehrthätigkeit anbetrifft, so las er zum Beispiel in den Jahren 1814—16 über Zahlentheorie nach Gauss und Legendre, sowie über ebene und sphärische Trigonometrie, wobei er das Lehrbuch von Cagnoli in der Uebersetzung von Chompré zu Grunde legte. Ueber die wissenschaftlichen Arbeiten, die ihn während jener Zeit beschäftigten, sind wir nicht näher unterrichtet; jedoch steht soviel fest, dass er sich schon damals ernstlich mit den Anfangsgründen der Geometrie befasst haben muss.

Im Jahre 1894 ist nämlich ein altes Kollegienheft zum Vorschein gekommen, das Nachschriften von Vorlesungen enthält, die Lobatschefskij von 1815 bis 1817 über Geometrie und Algebra gehalten hat. Nach den von Wassiljef über dieses Heft gemachten Mittheilungen befinden sich darin drei verschiedene Versuche, die Euklidische Parallelentheorie zu begründen.

In dem ersten Versuche erklärt Lobatschefskij die Parallellinien als solche Gerade, die gleiche Richtung haben, um auf diese Weise das Euklidische Parallelenaxiom zu vermeiden. In dem zweiten Versuche stützt er sich auf die Betrachtung unendlich grosser Ebenenstücke, ähnlich wie Bertrand (vgl. S. 71, 73 und 315).

Der dritte Versuch endlich ist besonders deshalb bemerkenswerth, weil er zeigt, dass sich Lobatschefskij sehr eingehend mit den Untersuchungen Legendres über die Parallelentheorie beschäftigt hat. Zunächst wird bewiesen, dass die Winkelsumme eines geradlinigen Dreiecks zwei Rechte nicht übersteigen kann und dass die Winkelsumme in jedem solchen Dreiecke gleich zwei Rechten ist, sobald sie nur in einem einzigen diesen Werth hat. Es handelt sich also nur noch darum, ein Dreieck zu finden, in dem die Winkelsumme gleich zwei Rechten ist, und in der That glaubt Lobatschefskij beweisen zu können, dass jedes rechtwinklige Dreieck, dessen einer spitzer Winkel gleich $\frac{1}{8}\pi$ ist, diese Forderung erfüllt. Erwähnenswerth ist, dass bei seinen Betrachtungen gewisse Sätze über Dreiecke, deren Winkelsumme kleiner ist als zwei Rechte, benutzt werden, zum Beispiel der Satz, dass die Summe der Winkel eines Dreiecks, das in einem andern enthalten ist, aber mit diesem eine Seite und einen anliegenden Winkel gemein hat, grösser sein muss als die Summe der

Winkel des grösseren Dreiecks. Doch braucht man deshalb nicht anzunehmen, dass Lobatschefskij diese Sätze selbständig gefunden hat, denn Sätze derselben Art kommen schon 1799 und 1800 in der zweiten und dritten Ausgabe von Legendres Eléments de Géométrie vor (vgl. S. 313).

Aus dem Gesagten geht hervor, dass Lobatschefskij damals noch gar weit von der Erkenntniss entfernt war, deren Begründung und Weiterbildung später seine Lebensaufgabe und seine grösste Leistung werden sollte, von der Erkenntniss nämlich, dass das Euklidische Parallelenaxiom wirklich ein Axiom und als solches unbeweisbar ist, und dass es eine in sich widerspruchsfreie Geometrie giebt, die dieses Axioms gar nicht bedarf. Er war noch vollständig in der Ueberzeugung befangen, von der sich Legendre sein ganzes langes Leben hindurch nicht hat frei machen können, dass jenes Axiom eines Beweises bedürftig und fähig sei, und er betheiligte sich an den fruchtlosen Bemühungen, einen solchen Beweis zu finden. Wir werden uns später dieser Thatsache zu erinnern haben.

Kapitel III.

Die Magnizkijsche Revision und Verwaltung. Lobatschefskijs Lehrthätigkeit während dieser Zeit.

Da die früher erwähnten Streitigkeiten an der Kasaner Universität gar nicht aufhören wollten, so fasste das Unterrichtsministerium im Februar 1819 den Beschluss, eine gründliche Revision der Universität vornehmen zu lassen, und beauftragte damit den wirklichen Staatsrath Michaíl Leóntjewitsch Magnízkij. Dieser war für die Dauer der Revision mit allen Vollmachten eines Kurators ausgestattet, und von seinem Berichte sollte es abhängen, ob man die Universität fortbestehen lassen oder auflösen würde.

Im Laufe des März fand die Revision statt, und Magnizkij kehrte sodann nach Petersburg zurück, um seinen Bericht zu erstatten. Zum Glücke liess man den Gedanken, die Universität aufzulösen, fallen, vielmehr wurde Magnizkij zum Kurator ernannt und leitete jetzt von Petersburg aus die Reorganisation der Universität. Freilich war das eine sehr eigenthümliche Reorganisation.

Magnizkij war in der Ansicht befangen, die wahre Ursache aller hervorgetretenen Uebelstände sei der mangelhafte Religionsunter-

richt an den Gymnasien und die gänzliche Vernachlässigung des Unterrichts in Religion und Moral an der Universität. Besonders die deutschen Professoren waren ihm ein Dorn im Auge, weil sie nach seiner Meinung ihre Schüler mit dem in Deutschland herrschenden Unglauben angesteckt hatten. Dieser Auffassung entsprechend traf er seine Massregeln.

Eine Anzahl Professoren wurde entfernt. Die Freiheit der Studenten wurde durch geradezu klösterliche Verordnungen in der unerträglichsten Weise beschränkt. Ein Direktor wurde angestellt, der nicht blos über den Lebenswandel der Studenten sondern auch über den der Professoren zu wachen hatte. Wer sich gegen die Vorschriften verging, wurde als ein „Sünder" bezeichnet und eingesperrt; in der Kirche wurde für diese Sünder öffentlich gebetet. Andrerseits wurden Belohnungen und Auszeichnungen nicht mehr in erster Linie für wissenschaftliche Kenntnisse verliehen, sondern vor allen Dingen für Kenntnisse in der Religion und für Frömmigkeit. Selbstverständlich mussten auch die Professoren ihre Vorlesungen nach diesen Grundsätzen einrichten; von Freiheit des Worts, ja des Denkens war keine Rede mehr.

Auf diese Weise musste unfehlbar bei Professoren und Studenten ein Geist der Heuchelei gross gezogen werden, dessen Folgen nicht anders als verderblich sein konnten. Aber nicht genug damit. Bei der Revision selbst hatte Magnizkij noch die einzelnen Professoren im Allgemeinen ganz zutreffend beurteilt; er hatte Bartels und Bronner in ihren Stellungen belassen und hatte sich namentlich auch über unsern Lobatschefskij äusserst günstig ausgesprochen — Renner lebte damals nicht mehr, denn er war schon im Juni 1816 gestorben, und Littrow war in demselben Jahre nach Ofen als Mitdirektor der dortigen Sternwarte übergesiedelt. Aber bald wurde das anders. Magnizkij verfuhr bei der Besetzung der Professuren mit äusserster Willkür; das Vorschlagsrecht des Senats betrachtete er als nicht vorhanden, machte nicht selten ganz unfähige Leute zu Professoren, setzte andre aus den nichtigsten Gründen ab und bevorzugte namentlich seine Günstlinge in der unverantwortlichsten Weise. Doch hat Lobatschefskij hierunter wenigstens nicht selbst zu leiden gehabt, denn er wurde verhältnissmässig bald, im Frühjahre 1822, gleichzeitig mit Simonof zum ordentlichen Professor ernannt.

Es ist kein Wunder, dass sich Bronner und Bartels unter diesen Umständen in Kasan nicht mehr wohl fühlten und danach trachteten, es zu verlassen. Bronner nahm schon 1819 Urlaub und kam einfach nicht wieder; er ging nach Aarau in der Schweiz, wo er noch

31 Jahre lang im Dienste des Kantons Aargau thätig gewesen ist. Ende 1820 schied auch Bartels, um einem Rufe nach Dorpat zu folgen. Die physiko-mathematische Abtheilung der Kasaner Universität, die schon vorher Renner und Littrow verloren hatte, war damit abermals zweier ihrer besten Lehrkräfte beraubt. Ausserdem verlor sie aber, wenigstens auf mehrere Jahre, auch noch Simonof, der seit 1816 als Nachfolger Littrows die Astronomie vertreten hatte, denn dieser war schon Anfang 1819, noch vor der Magnizkijschen Revision, nach Petersburg gereist und begleitete dann die russische Expedition, die 1819—21 unter der Führung Bellingshausens das antarktische Meer erforschte; erst 1822 kehrte er wieder nach Kasan zurück.

Da diese Verluste zunächst nicht ersetzt wurden, so lag die ganze Last des Unterrichts in der Mathematik, Physik und Astronomie längere Zeit auf den Schultern der beiden einzigen noch übrigen Professoren der Abtheilung, Nikolskij und Lobatschefskij, ja zeitweilig auf denen Lobatschefskijs allein, denn Nikolskij wurde durch den Bau der Universität, dem er sich ganz widmete, dem Unterrichte entzogen. Lobatschefskij entfaltete damals eine geradezu erstaunliche Thätigkeit. Im April 1819 wurde er mit der Abhaltung der Vorlesungen über Astronomie und mit der Leitung des astronomischen Observatoriums beauftragt; gleichzeitig übernahm er alle rein mathematischen Vorlesungen, die bisher Nikolskij gehalten hatte, und nach Bronners Weggange auch noch den Unterricht in der theoretischen und der Experimentalphysik. Nachdem Bartels ausgeschieden war, wurde ihm der ganze Unterricht in der reinen Mathematik übertragen, die Astronomie und die theoretische Physik musste er aber trotzdem beibehalten und nur von den Vorlesungen über Experimentalphysik wurde er auf sein dringendes Ersuchen befreit. Im Jahre 1822 übernahm Simonof zwar die Leitung des Observatoriums wieder, aber Lobatschefskij musste ihn im Sommer 1823 noch einmal vertreten und die Vorlesungen über Astronomie behielt er bis 1825 und ebenso lange die ganze theoretische Physik, doch las er auch nach 1825 immer noch über dieses Gebiet und übernahm ausserdem die Vorlesungen über Mechanik. Erst von der Mitte der dreissiger Jahre ab konnte er sich wieder ganz auf Vorlesungen über reine Mathematik beschränken.

Mit dem Halten der Vorlesungen war es übrigens noch nicht einmal gethan, denn jeder Professor musste allmonatlich einen Bericht über die gehaltenen Vorlesungen einreichen und ausserdem regelmässig über die Leistungen und Fortschritte, namentlich auch über den Lebenswandel seiner Zuhörer berichten.

Zu dieser überaus umfangreichen Lehrthätigkeit kamen nun noch verschiedene Aemter, die Lobatschefskij im Laufe der Zeit übernehmen musste. Wie schon erwähnt, war er 1818 Mitglied des Schulausschusses geworden. Auch das war unter einem Kurator vom Schlage Magnizkijs keine Kleinigkeit, denn dieser Ausschuss wurde nicht blos für die wissenschaftliche Tüchtigkeit jedes neu ernannten Lehrers verantwortlich gemacht, sondern auch und zwar vor allen Dingen für dessen Moralität und Frömmigkeit. Man kann sich daher denken, dass auch dieses Amt, das Lobatschefskij eine ganze Reihe von Jahren bekleidete, eine Menge Arbeit und namentlich unendliche Schreibereien mit sich brachte. Ferner wurde Lobatschefskij schon sehr bald zu den Verwaltungsgeschäften der Universität herangezogen. Noch als ausserordentlicher Professor wurde er Ende 1820 an Stelle seines Lehrers Bartels Dekan der physiko-mathematischen Abtheilung und blieb das bis 1827, mit alleiniger Ausnahme des Jahres 1823, wo das Dekanat an Simonof überging. Im Sommer 1821 musste er nach Petersburg reisen, um im Auftrage des Kurators mathematische Werke sowie physikalische und astronomische Apparate einzukaufen. Ende 1824 wurde er Mitglied des Ausschusses, der die Veröffentlichungen der Universität zu besorgen hatte, also namentlich die Herausgabe des Kasaner Boten, einer Monatsschrift, die seit 1820 auf Magnizkijs Anordnung an die Stelle der Kasaner Nachrichten getreten war, die aber, hauptsächlich weil ihr Inhalt ganz den Magnizkijschen Grundsätzen angepasst werden musste, gar keinen Erfolg hatte und keineswegs den Gewinn abwarf, den man von ihr für die Universitätskasse erhofft hatte. 1825 wurde er Vorsitzender des Ausschusses für den Bau der Universitätsgebäude, sowie ständiges Mitglied der Universitätsverwaltung. Es wird erzählt, dass er, um seinen Pflichten als Vorsitzender jenes Ausschusses genügen zu können, sogar die Baukunst von Grund aus studirte.

Schon im Jahre 1820 war Lobatschefskij vom Kurator beauftragt worden, die Universitätsbibliothek, die sich damals in einem geradezu unglaublichen Zustande der Vernachlässigung befand, in Ordnung zu bringen, doch waren seine Bemühungen vergeblich geblieben, da der damalige Bibliothekar, der uns schon bekannte Kondyref, ihnen mit allen Mitteln entgegenarbeitete. Einer Kommission, die später zu demselben Zwecke ernannt wurde, gelang es ebenso wenig auch nur das Geringste zu erreichen. In dieser Noth wandte sich der Senat im Oktober 1825 abermals an Lobatschefskij, und der übernahm wirklich neben seinen übrigen Pflichten auch noch das Amt des Universitätsbibliothekars, ja er verwaltete dieses Amt längere Zeit sogar ganz allein.

Ein Glück war es, dass Lobatschefskij in seinen Vorlesungen und in seinen wissenschaftlichen Arbeiten nicht mit den Magnizkijschen Ansichten in Streit kommen konnte, so dass ihm dabei keine Hindernisse in den Weg gelegt wurden. Auch sonst scheint er niemals das Missfallen Magnizkijs erregt zu haben, obwohl er nicht der Mann war, sich die Gunst seiner Vorgesetzten durch Schmeicheleien zu erkaufen. Immerhin muss auch auf ihm die Magnizkijsche Verwaltung, die bis zum Jahre 1826 dauerte, schwer genug gelastet haben. Die grosse Mehrheit des Senats der Universität liess sich als ein immer dienstfertiges Werkzeug Magnizkijscher Willkür gebrauchen und war auf Verlangen des Kurators zu jeder Handlung, auch zu ungesetzlichen bereit. Lobatschefskij verhielt sich bei solchen Gelegenheiten schweigend und unterzeichnete schweigend die gefassten Beschlüsse. Er mochte wohl einsehen, dass offener Widerstand zu nichts führen würde, aber es bleibt immerhin unverständlich und wirft einen Schatten auf sein Bild als Menschen, dass er sich durch sein Stillschweigen zum Mitschuldigen machte. Doch wissen wir zu wenig über seine Beweggründe, als dass wir ihn unbedingt verurteilen dürften, und ausserdem hat er die Schuld, die er auf sich geladen hatte, redlich gebüsst, denn für eine ganze Reihe der damals gefassten Beschlüsse wurden die Unterzeichner später, sogar noch im Jahre 1834, verantwortlich gemacht und sie mussten verschiedenen der von Magnizkij gemassregelten Professoren die Verluste ersetzen, die diese infolge ungesetzlicher Senatsbeschlüsse erlitten hatten. Jedenfalls ist das der einzige wirklich dunkle Punkt in Lobatschefskijs Leben und ein neuer Beweis dafür, dass die Verhältnisse eben stärker sind als die Menschen.

Kapitel IV.

Ein ungedrucktes Lehrbuch der Geometrie aus dem Jahre 1823.

Es ist wunderbar, dass Lobatschefskij damals trotz seiner vielseitigen und angestrengten Thätigkeit auch noch Zeit zu wissenschaftlichen Arbeiten fand, doch ist wohl anzunehmen, dass er das Bedürfniss hatte, sich auf diese Weise wenigstens zeitweilig über die Sorgen des Tages und über die unbefriedigenden Zustände in seiner Umgebung zu erheben. Durch den Druck veröffentlicht hat er allerdings in dieser Zeit nichts, doch war das nicht seine Schuld.

Soweit wir über seine damaligen Arbeiten unterrichtet sind, waren es wieder Geometrie und Algebra, mit denen er sich beschäftigte.

Im Jahre 1823 sandte er an Magnizkij nach Petersburg das Manuscript eines von ihm verfassten Lehrbuchs der Geometrie und bat den Kurator, zu veranlassen, dass dieses auf Staatskosten gedruckt werde. Magnizkij übergab das Manuscript zur Begutachtung an Nikolaus Fuss, der als Schüler und Mitarbeiter Eulers bekannt ist und der damals — er ist 1826 gestorben — ständiger Sekretär der Petersburger Akademie war. Fuss sprach sich in seiner Antwort vom 3. August 1823 höchst ungünstig aus und meinte: „Wenn der Verfasser glaubt, seine Schrift könne als Lehrbuch dienen, so zeigt er dadurch, dass er von den Ansprüchen, die man an ein Lehrbuch stellen muss, keinen rechten Begriff hat, das heisst, keinen Begriff von der Fülle der geometrischen Wahrheiten, die den Inbegriff eines Elementarkurses der Wissenschaft bilden, von der mathematischen Methode, von der Nothwendigkeit scharfer und deutlicher Erklärungen aller Begriffe, von der logischen Ordnung und der methodischen Eintheilung des Stoffs, von der gehörigen Aufeinanderfolge der geometrischen Wahrheiten, von der unerlässlichen Strenge und möglichst rein geometrischen Fassung der Beweise. Von allen diesen nothwendigen Eigenschaften ist in der Geometrie, die ich durchgesehen habe, auch nicht eine Spur." Besonders empört war Fuss deshalb, weil Lobatschefskij gewagt hatte, bei der Ausmessung gerader Linien das französische Meter als Längeneinheit zu benutzen und bei der Winkelmessung als Grad den hundertsten Theil eines rechten Winkels. In dem Abscheu vor diesen Neuerungen, die der verruchten französischen Revolution entstammten, war Magnizkij selbstverständlich mit Fuss einig, und vermuthlich war schon dieses Vergehen genügend, dem Werke in Magnizkijs Augen allen Werth zu nehmen. Jedenfalls blieb es ungedruckt, und erst durch die zufällige Auffindung der beiden zwischen Magnizkij und Fuss gewechselten Briefe erfuhr man vor einigen Jahren, dass ein solches Manuscript vorhanden gewesen war; dieses selbst aber war verschollen und schien verloren.

Erfreulicher Weise ist das doch nicht der Fall. Im Frühjahre 1898 hat Professor Sagóskin in Kasan bei einer Durchsicht des Archivs des Kurators der Universität das verloren geglaubte Manuscript entdeckt, und durch briefliche Mittheilungen Wassiljefs bin ich in den Stand gesetzt, die beiden merkwürdigsten Stellen daraus in getreuer Uebersetzung nach dem russischen Wortlaute wiederzugeben. Allerdings lässt sich aus diesen Stellen nicht erkennen, in wie weit das von Fuss gefällte Urteil berechtigt war oder nicht, aber das ist auch weniger wichtig, und wir können hier diese Frage einfach auf sich beruhen lassen. Viel wichtiger ist es, zu wissen, welchen Stand-

punkt Lobatschefskij der Euklidischen Parallelentheorie gegenüber einnahm, als er sein Lehrbuch schrieb, und darüber erhalten wir in der That einigen Aufschluss.

Die eine Stelle lautet in der Uebersetzung folgendermassen:

„Die Bestimmung der unbekannten Theile von Dreiecken bildet den Gegenstand der Trigonometrie, wir können daher schon jetzt vorläufig soviel feststellen, dass die Aufgaben der Trigonometrie darauf hinaus kommen müssen, die Grösse dreier Stücke eines Dreiecks zu finden, sobald die drei andern gegeben sind. Sodann ist ersichtlich, dass Dreiecke nicht immer kongruent sind, wenn sie nur gleiche Winkel haben, folglich kann auch die Trigonometrie kein Verfahren zur Bestimmung der Seiten eines Dreiecks liefern, wenn nur dessen Winkel bekannt sind. Einige Mathematiker haben die Unmöglichkeit, Linien mit Hülfe von Winkeln zu bestimmen, als Grundlage der Geometrie annehmen wollen, aber diese Grundlage ist ungenügend, denn Grössen verschiedener Art können sich in Abhängigkeit von einander befinden."

Hierauf folgt ein Kapitel mit der Ueberschrift: „Ueber die Messung der Rechtecke", dessen Anfang ebenfalls von Interesse ist:

„Die Messung ebener Flächenräume gründet sich darauf, dass zwei Linien zusammentreffen, wenn sie auf einer dritten nach derselben Seite hin stehen und wenn die eine eine Senkrechte ist, die andre aber unter einem spitzen Winkel geneigt ist, der sich der Senkrechten zuwendet. Die Linien AB und CD müssen bei genügender Verlängerung zusammentreffen, wenn die eine von ihnen AB auf BC senkrecht steht und die andre CD gegen BC unter einem spitzen Winkel C geneigt ist, der sich der Senkrechten AB zuwendet. Einen strengen Beweis für diese Wahrheit hat man bis jetzt nicht finden können. Die Beweise, die man gegeben hat, kann man nur als Erläuterungen bezeichnen, aber sie verdienen nicht im vollen Sinne als mathematische Beweise geschätzt zu werden."

Lobatschefskij theilt dann von diesen Beweisen einen mit, den er als den besten bezeichnet und der ganz ähnlich wie der Bertrandsche auf der Vergleichung des Flächenraums zwischen zwei Lothen mit dem Flächenraume zwischen den Schenkeln eines Winkels beruht (vgl. S. 71 ff. und S. 315).

Die angeführten Worte zeigen, dass Lobatschefskij seit den Jahren 1815 und 16 wesentlich tiefer in den Gegenstand eingedrungen war. Er war sich mittlerweile jedenfalls darüber klar geworden, dass alle bisherigen Versuche das Parallelenaxiom zu beweisen verfehlt waren, und dass insbesondre die Annahme, die Winkel eines Dreiecks könnten nur von den Verhältnissen der Seiten abhängen, nicht aber

von den absoluten Längen der Seiten, in der Natur der Sache nicht begründet ist. Dagegen bleibt unsicher, ob er 1823 wirklich schon im Besitze seiner neuen Geometrie war oder nicht; es erscheint sogar wahrscheinlicher, dass er es noch nicht war, denn sonst hätte er sich wohl bestimmter dahin ausgesprochen, dass der Satz über das Zusammentreffen der beiden Linien AB und CD überhaupt unbeweisbar sei. Dafür, dass er damals sein System der Geometrie noch nicht vollständig entwickelt hatte, spricht überdies auch ein andrer Umstand. Wie mir nämlich Wassiljef auf eine Anfrage mitgetheilt hat, erklärt Lobatschefskij in jenem Manuscripte die Ebene ganz und gar in der Euklidischen Weise, während er in seinen spätern Schriften Ebene und gerade Linie auf den Begriff der Kugelfläche zurückführt und auf diese Zurückführung ausdrücklich grosses Gewicht legt (vgl. S. 6 ff., 80 f. und 93 ff.). Wie dem auch sei, als er jenes Lehrbuch schrieb, muss er der Erkenntniss der vollen Wahrheit über die Parallelentheorie schon sehr nahe gewesen sein.

Durch den Misserfolg mit seinem Lehrbuche der Geometrie liess sich Lobatschefskij übrigens nicht von derartigen Arbeiten abschrecken, vielmehr schrieb er jetzt ein Lehrbuch der Algebra zum Gebrauche in Gymnasien. Im Jahre 1825 legte er dieses der physikomathematischen Abtheilung vor, und auf Grund von deren Gutachten beschloss der Senat der Universität, beim Kurator zu beantragen, dass das Buch auf Staatskosten gedruckt und in den Gymnasien eingeführt werde. Da aber ein Jahr verging, ohne dass dieser Beschluss ausgeführt wurde, so erbat sich Lobatschefskij schliesslich in einem an den Senat gerichteten Schreiben sein Manuscript zurück, indem er dabei aussprach, „er bedaure die unnütze Arbeit, die er sich gemacht habe, um den Anforderungen der Behörde zu genügen". Erst viel



später wurde das Buch doch noch gedruckt: es erschien 1833 in Kasan unter dem Titel: „Algebra oder die Rechnung mit endlichen Grössen" (vgl. S. 318, Z. 18 ff.).

Kapitel V.

Magnizkijs Sturz. Lobatschefskij legt der physiko-mathematischen Abtheilung seine neue Geometrie vor.

Das Jahr 1825 war das letzte der Magnizkijschen Willkürherrschaft. Einen Wechsel in der Leitung des Unterrichtsministeriums hatte Magnizkij allerdings noch überdauert, aber er mochte sich bei

dem neuen, freieren Geiste, der jetzt im Ministerium wehte, nicht mehr sicher fühlen; ausserdem liefen nunmehr in Petersburg auch Klagen ein über die Ordnung der Dinge, die Magnizkij in Kasan eingeführt hatte, und diese Klagen fanden bei dem neuen Minister Gehör. Die Folge war, dass Kaiser Nikolaus im Januar 1826, kurz nach seiner Thronbesteigung, eine erneute Revision der Universität Kasan befahl und mit der Ausführung der Revision den Generalmajor Sheltúchin beauftragte, dem als sachverständiger Beirath ein Beamter des Kultusministeriums, Namens Jésipof, beigegeben wurde.

Das Ergebniss dieser zweiten Revision fiel für Magnizkij so ungünstig aus, dass er abgesetzt und in Reval internirt wurde; die übertriebenen Vorschriften, durch die er die Freiheit der Studenten in so unerhörter Weise beschränkt hatte, wurden aufgehoben, und am 24. Februar (8. März) 1827 erhielt der Lehrbezirk Kasan in Mussin-Puschkin einen Mann zum Kurator, der wirkliches Verständniss für die Aufgaben einer Universität besass und der auf alle Weise und mit dem besten Erfolge bestrebt war, die Wunden zu heilen, die Magnizkijs Misswirthschaft der Kasaner Hochschule geschlagen hatte.

Lobatschefskij muss sich nach der Abfassung des vorhin erwähnten Lehrbuchs der Geometrie fortgesetzt ernstlich mit den Anfangsgründen der Geometrie beschäftigt haben, doch mochte er wohl, solange Magnizkij noch am Ruder war, nicht geneigt sein, mit seinen Ergebnissen hervorzutreten. Es dürfte daher, wie schon Wassiljef bemerkt hat, kein zufälliges Zusammentreffen sein, dass Sheltuchin die Revision der Universität am 8. (20.) Februar 1826 begann und dass nur wenige Tage später, am 12. (24.) Februar 1826, Lobatschefskij der physiko-mathematischen Abtheilung eine Arbeit vorlegte, in der er den zweitausendjährigen Streit über das Euklidische Parallelenaxiom zum Austrage gebracht hatte.

Leider kennen wir von dieser Arbeit selbst nur den Titel: „Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles“, gedruckt worden ist sie niemals, und das Manuscript muss vorläufig als verloren gelten, wenn nicht ein gütiges Geschick es doch wieder ans Tageslicht bringt. Zum Glück sind wir dagegen über den Inhalt der Arbeit vollkommen genügend unterrichtet; denn die 1829 und 30 im Kasaner Boten erschienene Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie“ (hier S. 1—66) bezeichnet Lobatschefskij selbst als einen Auszug aus der Arbeit von 1826 und er erklärt ausdrücklich, dass er die Gleichungen für das geradlinige Dreieck (S. 21, Gl. (17)) und Alles darauf folgende, also hier S. 21—66, schon in der „Exposition“ mitgetheilt

habe (vgl. S. 247, Z. 5—1 v. u.). Ausserdem ist uns auch noch in den „Neuen Anfangsgründen der Geometrie“, die erst in den dreissiger Jahren gedruckt worden sind, ein Bruchstück aus der „Exposition“ erhalten (s. S. 214—218, vgl. auch S. 341, Z. 9ff.).

Allerdings bleibt hierbei immer noch eine kleine Unklarheit zurück. Man sieht nämlich nicht recht ein, was Lobatschefskij eigentlich mit dem Zusatze „avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles“ gemeint hat: wenigstens findet sich in seinen spätern gedruckten Schriften keine Stelle, aus der man mit Sicherheit auf die Bedeutung dieses Zusatzes schliessen könnte. An einen vermeintlich mathematisch strengen Beweis des Euklidischen Parallelenaxioms zu denken, ist ausgeschlossen, wenn man nicht das eigene Zeugniss Lobatschefskijs über das Verhältniss zwischen der „Exposition“ und der 1829 und 30 im Kasaner Boten gedruckten Arbeit anzweifeln will, wozu nicht der geringste Grund vorliegt. Nur vermuthen kann man, er habe mit diesem Zusatze die hier auf S. 22—24 wiedergegebenen Betrachtungen gemeint, durch die gezeigt wird, dass in unserm Raume die Euklidische Geometrie so genau richtig ist, dass man nicht hoffen darf, jemals auf eine merkliche Abweichung von ihr zu stossen.

Wie dem auch sein mag, wir dürfen wohl, ohne einen Irrthum befürchten zu müssen, sagen, dass in der „Exposition succincte“ Folgendes geleistet war: Lobatschefskij sprach es klipp und klar aus, dass das Euklidische Parallelenaxiom niemals werde bewiesen werden können, weil es eben unbeweisbar sei. Er zeigte, dass es eine in sich widerspruchsfreie Geometrie giebt, die dieses Axioms gar nicht bedarf, in der mithin die Winkelsumme des geradlinigen Dreiecks von zwei Rechten verschieden ist und zwar kleiner als zwei Rechte. Er hatte diese Geometrie, für die er in dem später veröffentlichten Auszuge aus der „Exposition“ den Namen: Imaginäre Geometrie vorschlägt, so weit entwickelt, dass alle ihre Aufgaben auch rein analytisch behandelt werden konnten, hatte die allgemeinen Regeln zur Berechnung von Bogenlängen, Flächenräumen und Rauminhalten aufgestellt und die wichtigsten Aufgaben dieser Art gelöst. Auch hatte er sicher schon damals bemerkt, dass die Gleichungen, die zwischen den Seiten und Winkeln eines geradlinigen Dreiecks der neuen Geometrie bestehen, sich aus den Gleichungen für ein sphärisches Dreieck ergeben, wenn man dessen Seiten rein imaginäre Werthe ertheilt.

Ein solches Werk konnte auch ein Mann wie Lobatschefskij nicht im Laufe einiger Monate oder gar Wochen vollbracht haben. Noch heute hat jeder, der sich in die von Lobatschefskij geschaffene

Geometrie einarbeitet, gewisse Schwierigkeiten zu überwinden: er muss viele alte, gewohnte Vorstellungen, die er aus der Euklidischen Geometrie mitbringt, über Bord werfen, einige Zeit lang ist er stets in Gefahr rückfällig zu werden und glaubt in der neuen Geometrie Widersprüche zu finden, die in Wahrheit nicht vorhanden sind und die sich bei näherm Zusehen in Nichts auflösen. Auf wie viel grössere Schwierigkeiten musste Lobatschefskij stossen, der ganz auf sich selbst angewiesen war und sich überhaupt erst Bahn zu brechen hatte. Mochte ihm auch die Möglichkeit der neuen Geometrie in einem günstigen Augenblicke wie durch eine plötzliche Eingebung aufgegangen sein — diese Erkenntniss gegen jeden Zweifel sicher zu stellen, sie zu einem Systeme von solcher Vollkommenheit auszubauen, wie es jetzt vorlag, das musste noch viel saure Mühe, viel angestrengtes Nachdenken gekostet haben. Wir dürfen daher wohl annehmen, dass die im Februar 1826 vorgelegte Abhandlung die Frucht mehrjähriger Arbeit war. Da nun Lobatschefskij bis zum Jahre 1823 allem Anscheine nach die Lösung des Räthsels noch nicht oder wenigstens noch nicht vollständig gefunden hatte, so werden es die drei Jahre 1823, 24 und 25 gewesen sein, die diese Frucht gereift haben. Erinnern wir uns dazu, welche umfassende, vielseitig angespannte Thätigkeit Lobatschefskij während dieser Zeit noch ausserdem entfaltet hat, so werden wir ihm unsre Bewunderung nicht versagen können.

Kapitel VI.

Die Entdecker der nichteuklidischen Geometrie: Gauss, Schweikart, Taurinus, Lobatschefskij, J. Bolyai.

Wir haben jetzt Lobatschefskij bis an den Zeitpunkt begleitet, der in der Geschichte seines Lebens und namentlich in der seiner wissenschaftlichen Thätigkeit stets an erster Stelle genannt werden wird. Die Entdeckung, mit der Lobatschefskijs Name auf alle Zeiten unzertrennlich verknüpft bleibt, ist gemacht, eine neue, vom Parallelenaxiome unabhängige Geometrie ist geschaffen, in der die Euklidische Geometrie als ein besondrer Fall enthalten ist. Lobatschefskij hat auch in der Folge diese Leistung nicht mehr überboten und widmete seine spätern wissenschaftlichen Arbeiten zum weitaus grössten Theile der Aufgabe, einerseits die gewonnenen Ergebnisse noch weiter zu vertiefen und sie nach Möglichkeit für die Analysis

nutzbar zu machen, andrerseits auf Grund der gewonnenen Erkenntniss ein zusammenhängendes Lehrgebäude der Geometrie von den ersten Anfängen an zu errichten.

Unter diesen Umständen scheint es angemessen, die Schilderung seines Lebensganges zu unterbrechen und zunächst festzustellen, in welchem Zusammenhange seine Entdeckung mit den Versuchen steht, die vor ihm und gleichzeitig mit ihm gemacht worden sind, die Parallelentheorie ins Reine zu bringen und den Stein des Anstosses zu beseitigen, den man von Alters her in dem Euklidischen Parallelenaxiome erblickt hat. Darauf näher einzugehen ist um so mehr geboten, als auch hier die merkwürdige Erscheinung wiederkehrt, die in der Geschichte der Mathematik mehrfach zu beobachten ist, dass nämlich dieselbe wichtige Entdeckung nahezu gleichzeitig von verschiedenen Männern an räumlich weit auseinanderliegenden Orten gemacht wird; diese Erscheinung wiederholt sich hier sogar in ganz besonders auffallendem Masse.

Schon ungefähr ein Jahrzehnt vor Lobatschefskij war Gauss nach langjährigen Bemühungen zu der Ueberzeugung gekommen, dass eine vom Parallelenaxiome unabhängige Geometrie möglich sei, die er in vertraulichen Mittheilungen als die Anti-Euklidische oder Nicht-Euklidische bezeichnete. Wie er später in einem Briefe aus dem Jahre 1824 schreibt, hatte er diese Geometrie, die mit der von Lobatschefskij gefundenen vollkommen übereinstimmt, „für sich selbst ganz befriedigend ausgebildet, so dass er jede Aufgabe in derselben auflösen konnte mit Ausnahme der Bestimmung einer Constante, die sich a priori nicht ausmitteln lässt“. Er selber hat freilich niemals etwas darüber veröffentlicht, ja nicht einmal seine Untersuchungen im Zusammenhange aufgeschrieben. Mehrere Jahre nach seinem Tode hat die mathematische Welt überhaupt erst erfahren, dass er sich mit solchen Ideen getragen hat, und erst in allerneuester Zeit hat sich das Dunkel, das bisher über der Entwickelung seiner Ideen lag, wenigstens einigermassen gelichtet, namentlich weil endlich sein handschriftlicher Nachlass zugänglich geworden ist.

Unabhängig von Gauss und ebenfalls eine ganze Reihe von Jahren vor Lobatschefskij hat Schweikart, damals Professor der Jurisprudenz in Charkof, später in Marburg, das Bestehen einer Geometrie erkannt, in der die Winkelsumme kleiner ist als zwei Rechte, nachdem er früher, 1807, selbst in einem Schriftchen über die Theorie der Parallellinien einen missglückten Versuch gemacht hatte, das Parallelenaxiom zu beweisen. Er nannte seine neue Geometrie Astralgeometrie, weil sie, wenn der Raum, in dem wir leben, wirklich

ihren Gesetzen gehorcht, erst bei Dreiecken merkbar werden kann, die sich bis zu den nächsten Fixsternen erstrecken; doch hat er ebensowenig wie Gauss etwas darüber veröffentlicht.

Von diesem Schweikart angeregt und überdies auch durch Gauss beeinflusst, hat dann Taurinus, ein Neffe Schweikarts, sich eifrig mit der Parallelentheorie beschäftigt und ist auch seinerseits zu der von Gauss so genannten nichteuklidischen Geometrie gelangt; er bemerkte nämlich, dass die Formeln der sphärischen Trigonometrie auch dann noch in reeller Gestalt geschrieben werden können, wenn man den Seiten des sphärischen Dreiecks rein imaginäre Werthe ertheilt, und dass die so entstandenen Formeln die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks darstellen, dessen Winkelsumme kleiner als zwei Rechte ist. Er hat diese Betrachtungen 1826 auf den letzten elf Seiten seiner „Geometriae prima Elementa“ veröffentlicht und dabei auch eine ganze Anzahl von Aufgaben aus der neuen Geometrie, die er „logarithmisch-sphärische“ nannte, gelöst. Seine „Elementa“ sind, soweit wir wissen, das erste gedruckte Buch, in dem die trigonometrischen Formeln der nichteuklidischen Geometrie angegeben und auf die Lösung von Aufgaben, wie die Berechnung des Kreisumfangs und des Kreisinhalts angewendet sind. In Bezug auf die Veröffentlichung hat Taurinus auch vor Lobatschefskij die Priorität, denn dieser hat zwar seine „Exposition“ in demselben Jahre 1826 der physiko-mathematischen Abtheilung der Kasaner Universität vorgelegt, aber man kann das doch kaum eine Veröffentlichung nennen, und gedruckt wurden seine Untersuchungen erst mehrere Jahre später, 1829 und 30. Dagegen kann man allerdings Taurinus deswegen nicht auf eine Linie mit Lobatschefskij stellen, weil er im Grunde seines Herzens immer noch an die unbedingte Wahrheit der Euklidischen Geometrie glaubte und der Meinung war, deren alleinige Richtigkeit lasse sich doch noch irgendwie beweisen. Das kommt namentlich darin zum Ausdruck, dass er einzig und allein die Euklidische Geometrie als eine ebene Geometrie gelten lassen wollte, die als eben zwischen den beiden andern, der logarithmisch-sphärischen und der sphärischen, in der Mitte stehe. Ausserdem ist Taurinus selbst niemals wieder öffentlich auf die Frage zurückgekommen, weil sein Buch nicht die geringste Beachtung fand; er hat infolgedessen auf seine Zeitgenossen gar keine Wirkung ausgeübt und war vollständig vergessen, bis fast sechs Jahrzehnte später Stäckel sein Buch entdeckte.

Zu den schon genannten Männern kommt endlich noch Johann Bolyai hinzu, ein Ungar, dessen Vater Wolfgang Bolyai einst mit Gauss zusammen in Göttingen studirt hatte. Dieser hat in denselben

Jahren, in denen Lobatschefskij die Lösung der Parallelenfrage fand, auch seinerseits die Unbeweisbarkeit des Euklidischen Parallelenaxioms erkannt und die neue Geometrie systematisch entwickelt. Er sagt selbst, dass er schon im Jahre 1823 das Problem dem Wesen nach durchdrungen und dass er 1825 einem seiner früheren Lehrer einen handschriftlichen Aufsatz über den Gegenstand mitgetheilt habe. Es ist also sehr wahrscheinlich, dass Lobatschefskij und J. Bolyai fast genau zu gleicher Zeit die nichteuklidische Geometrie entdeckt und vollständig ausgebildet haben. Freilich hat hier Lobatschefskij die Priorität der Veröffentlichung für sich, denn J. Bolyais Darstellung der nichteuklidischen Geometrie, der berühmte Appendix zu dem Tentamen seines Vaters, ist erst 1831 gedruckt und 1832 mit dem ersten Bande des Tentamens erschienen.

Es ist gewiss höchst merkwürdig, dass in der damaligen Zeit die zwei Jahrtausende alte Frage der Parallelentheorie gleich von so vielen verschiedenen Seiten her Beantwortung gefunden hat; doch verliert diese Thatsache viel von ihrem Ueberraschenden, wenn man bedenkt, dass seit Euklids Zeiten diese Frage eigentlich niemals von der Tagesordnung verschwunden war.

Wie viele Mathematiker haben sich nicht in diesen zweitausend Jahren mit der Parallelentheorie abgequält. Schon lange vor Gauss war sich ja eigentlich jeder Mathematiker darüber klar: hier ist etwas nicht in Ordnung, hier ist das sonst so vollkommene Gebäude der Euklidischen Geometrie nicht so fest gegründet wie in seinen übrigen Theilen. In fast jedem Lehrbuche der Geometrie stand zu lesen: Euklids Parallelentheorie ist richtig, kein Zweifel, aber eine Schwierigkeit steckt darin, und dann hiess es entweder: erst der Verfasser hat diese Schwierigkeit glücklich gehoben, oder: die Lösung dieser Schwierigkeit ist noch von der Zukunft zu erhoffen.

Andrerseits hatte bereits das achtzehnte Jahrhundert zwei Männer hervorgebracht, die der Lösung des Räthsels ausserordentlich nahe gekommen waren. Saccheri hatte schon 1733 in seinem „Euclides ab omni naevo vindicatus“ mit grossem Scharfsinne die Folgen untersucht, die sich ergeben, wenn man das Euklidische Parallelenaxiom fallen lässt, und nur der unbegreiflichen Gewalt, die Euklids Autorität über ihn wie über alle andern ausübte, ist es zuzuschreiben, dass Saccheri schliesslich seine eigene Schöpfung, die Anfänge einer vom Parallelenaxiom unabhängigen Geometrie, wieder verleugnete und glaubte, das Parallelenaxiom beweisen zu können. Dreiunddreissig Jahre später hatte sich dann Lambert ebenfalls die Frage vorgelegt, welche Schlüsse man aus der Annahme ziehen könne, das Parallelen-

axiom sei unrichtig, und er war ausser andern schönen Ergebnissen insbesondre zu dem Satze gelangt, dass dann eine absolute Längeneinheit vorhanden sei, und hatte sogar den kühnen Gedanken ausgesprochen, die Geometrie, bei der die Winkelsumme im Dreiecke kleiner als zwei Rechte ist, sei möglicherweise auf einer imaginären Kugel verwirklicht, geradeso wie die sphärische Geometrie den Fall verwirklicht, dass die Winkelsumme grösser ist als zwei Rechte. Zwar hatte auch Lambert schliesslich die alleinige Richtigkeit der Euklidischen Geometrie aufrecht erhalten wollen, aber er war doch allem Anscheine nach von seinem Beweisversuche nicht recht befriedigt, wenigstens hat er seine „Theorie der Parallellinien“ nicht selbst veröffentlicht; erst nach seinem Tode wurde sie 1786 durch J. Bernoulli herausgegeben.

Allerdings müssen wir gleich hinzufügen, dass Saccheris und Lamberts Arbeiten sehr bald in Vergessenheit geriethen und erst vor wenigen Jahren wieder entdeckt worden sind, sie scheinen daher auf keinen der spätern Entdecker der nichteuklidischen Geometrie Einfluss ausgeübt zu haben. Höchstens bei Gauss ist es nicht ganz ausgeschlossen, dass er das Buch von Saccheri oder wenigstens die Abhandlung von Lambert gekannt hat, doch wissen wir darüber gar nichts. Taurinus hatte zwar aus Camerers Ausgabe der Euklidischen Elemente ersehen, dass Saccheri und Lambert Untersuchungen über die Parallelentheorie angestellt hatten, aber diese Untersuchungen selbst kannte er jedenfalls zu der Zeit nicht, wo er seine „Geometriae prima Elementa“ schrieb; ähnlich wird es sich mit Schweikart verhalten haben. Lobatschefskij und J. Bolyai endlich haben Saccheri schwerlich jemals auch nur dem Namen nach gekannt, und von Lamberts Parallelentheorie haben sie vermuthlich ebensowenig etwas erfahren.

Aber wenn auch Saccheris und Lamberts Leistungen in Vergessenheit gerathen waren und infolgedessen auf die schliessliche Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie ohne Einfluss blieben — die Schwierigkeit in der Parallelentheorie war und blieb doch die Frage, die mehr als alle andern die Mathematiker fesselte und die jahraus jahrein Bücher und Abhandlungen mit neuen Versuchen zu ihrer Beantwortung hervorrief. Als nun die Lösung der Schwierigkeit endlich gefunden wurde, als aber der Entdecker, Gauss, seine Lösung für sich behielt, ist es da ein so grosses Wunder, dass dem ersten Entdecker bald andre folgten? Müssen diese, weil sie nach Gauss kamen, durchaus von ihm abhängig sein?

Von Schweikart ist es wohl unbestreitbar und auch unbestritten, dass er ganz selbständig, unabhängig von Gauss auf die Idee einer

vom Parallelenaxiom unabhängigen Geometrie gekommen ist. Taurinus hatte allerdings durch einen Brief von Gauss erfahren, dass dieser eine solche Geometrie besass, und er war überdies von seinem Oheim Schweikart darauf hingewiesen worden; aber den genialen Gedanken, diese Geometrie mit einem Schlage aus der sphärischen abzuleiten, hat er offenbar ganz selbständig gefasst.

Wie steht es nun aber mit Lobatschefskij und J. Bolyai? Dass sie von einander unabhängig waren, ist klar. Lobatschefskij hat vermuthlich überhaupt niemals etwas von dem Vorhandensein dieses Nebenbuhlers gehört, und J. Bolyai hat erst viele Jahre später wenigstens Einiges von Lobatschefskijs Arbeiten kennen gelernt und, wie sein handschriftlicher Nachlass zeigt, mit kritischem Blicke gelesen. Beziehungen zu Schweikart und Taurinus sind bei beiden ausgeschlossen. Dagegen sind allerdings Umstände vorhanden, die der Vermuthung, Gauss habe die Untersuchungen von Lobatschefskij und J. Bolyai wenigstens mittelbar veranlasst, einen gewissen Schein von Berechtigung geben: war doch Lobatschefskijs Lehrer, Bartels, mit Gauss befreundet, und war doch J. Bolyais Vater, Wolfgang, ein alter Studienfreund von Gauss. Sehen wir zu, ob sich diese Vermuthung, die von verschiedenen Seiten ausgesprochen worden ist, bei näherer Betrachtung der Verhältnisse bestätigt; doch müssen wir uns hier in der Hauptsache auf die Beleuchtung des vermutheten Zusammenhangs zwischen Gauss und Lobatschefskij beschränken.

Wir haben gesehen, dass Lobatschefskij, als er in den Jahren 1815 und 16 über Geometrie vortrug, noch ganz auf dem Boden Euklids stand und verschiedene Versuche zum Beweise des Parallelenaxioms machte, jedenfalls aber keine Zweifel an dessen Richtigkeit äusserte; dass er ferner 1823 zwar die bisherigen Beweisversuche als verfehlt erkannt hatte, aber doch allem Anscheine nach seine neue Geometrie noch nicht besass, wenn er ihr auch sehr nahe sein mochte. Also Lobatschefskij war keineswegs beim ersten Anlaufe über die Schwierigkeit Herr geworden, sondern es dauerte noch geraume Zeit, gegen acht Jahre, bis er den Gordischen Knoten, den niemand lösen konnte, zerhieb, indem er zeigte, dass das Euklidische Parallelenaxiom zum Aufbaue der Geometrie gar nicht nöthig ist.

Andrerseits waren Bartels und Gauss blos bis zum Jahre 1807 zusammen und haben einander niemals wieder gesehen, und Bartels hatte zwar noch im Jahre 1808 in Kasan einen Brief von Gauss erhalten, seitdem aber bis 1821, wo er bereits in Dorpat war, keinen wieder, und auch der Brief von 1808 enthielt aller Wahrscheinlichkeit nach nur freundschaftliche Mittheilungen, nichts Mathematisches.

Wollen wir daher wissen, was Lobatschefskij etwa durch Bartels über die Ideen von Gauss erfahren haben kann, so brauchen wir nicht weiter als bis zum Jahre 1807, allerhöchstens bis 1808 zu gehen; nur was Gauss bis dahin erkannt hatte, kann für uns in Betracht kommen. Zum Glücke wissen wir darüber wenigstens einigermassen Bescheid.

Gauss hatte schon in den neunziger Jahren des achtzehnten Jahrhunderts angefangen, sich mit den Grundlagen der Geometrie zu beschäftigen. Ueber die Zeit bis 1808 steht Folgendes fest:

Am 16. December 1799 schreibt er an seinen Studienfreund Wolfgang Bolyai: „Ich selbst bin in meinen Arbeiten darüber [über die ersten Gründe der Geometrie] weit vorgerückt, ...; allein der Weg, den ich eingeschlagen habe, führt nicht so wol zu dem Ziele das man wünscht ... als vielmehr dahin, die Wahrheit der Geometrie zweifelhaft zu machen.“ Ausserdem sagt er, dass er die ganze Geometrie — gemeint ist natürlich die Euklidische — streng beweisen könne, sobald sich beweisen lasse, dass es für den Flächeninhalt eines geradlinigen Dreiecks keine endliche obere Gränze gebe; solcher Sätze habe er mehrere. Hier ist er also ganz nahe daran, an der Richtigkeit der Geometrie, das heisst, des Euklidischen Parallelenaxioms zweifelhaft zu werden.

Ein fünfjähriger Zwischenraum liegt zwischen dieser Aeusserung und der nächsten, die abermals in einem Briefe an W. Bolyai enthalten ist. In diesem vom 25. November 1804 stammenden Briefe spricht er von einer „Gruppe von Klippen“, an denen seine Versuche bisher gescheitert seien, und fügt hinzu: „Ich habe zwar noch immer die Hofnung, dass jene Klippen einst, und noch vor meinem Ende, eine Durchfahrt erlauben werden. Indess habe ich jetzt so manche andere Beschäftigungen vor der Hand, dass ich gegenwärtig daran nicht denken kann, und glaube mir, es soll mich herzlich freuen, wenn Du mir zuvorkommst, und es Dir gelingt alle Hindernisse zu übersteigen.“ Das klingt freilich gar nicht, als ob die Autorität Euklids seit dem Jahre 1799 an Kraft verloren hätte; im Gegentheile, man hat den Eindruck, dass Gauss 1804 eher stärker unter ihrem Banne gestanden habe, als zuvor.

Der Briefwechsel zwischen Gauss und W. Bolyai lässt uns jetzt im Stiche, denn er enthält von 1804 bis 1832 keine Aeusserung von Gauss über die Parallelenfrage. Dafür können wir uns aber auf eine Bemerkung berufen, die Schumacher im November 1808 in einem Tagebuche aufgezeichnet hat, das er während eines längern Aufenthaltes in Göttingen führte. Offenbar unter dem Eindrucke eines Ge-

sprächs mit Gauss schreibt Schumacher da, Gauss habe die Theorie der Parallellinien darauf zurückgebracht, dass wenn die angenommene Theorie nicht wahr wäre, es eine constante a priori der Länge nach gegebene Linie geben müsse, „welches absurd ist". Doch halte Gauss selbst diese Arbeit noch nicht für abgeschlossen.

Hieraus geht hervor, dass Gauss auch im Jahre 1808 noch schwankte. Auf die Worte: „welches absurd ist" wollen wir dabei noch nicht einmal das geringste Gewicht legen, denn es ist höchst wahrscheinlich, dass die Schumacher aus seinem Eigenen hinzugefügt hat, wohl aber legen wir Gewicht auf den nachfolgenden Satz. Wenn Gauss selber seine Untersuchungen noch nicht für abgeschlossen hielt, so muss er noch immer halb und halb an Euklid geglaubt haben; auf alle Fälle war er auch damals noch nicht vollständig von der Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms überzeugt. Die Thatsache schliesslich, dass im Falle der Unrichtigkeit des Euklidischen Axioms eine a priori gegebene Einheit der Länge vorhanden ist, hatte Lambert schon 1766 erkannt, und Legendre hatte schon 1794 auf die Unmöglichkeit des Vorhandenseins einer solchen Längeneinheit einen Beweis für die Richtigkeit des Parallelenaxioms gegründet (vgl. S. 312).

Im Ganzen erscheint daher soviel sicher, dass Gauss in der Zeit bis 1808, die hier allein für uns in Betracht kommt, zwar an der unbedingten Wahrheit des Euklidischen Parallelenaxioms zweifelhaft geworden, aber seiner Sache doch noch nicht ganz sicher war. Den endgültigen Bruch mit den Euklidischen Anschauungen wird er erst zwischen 1808 und 1816 vollzogen haben. Dass er spätestens 1816 seine „anti-Euclidische" Geometrie systematisch entwickelt und die zugehörige „transcendente" Trigonometrie aufgestellt hatte, geht aus einem höchst merkwürdigen Briefe hervor, den sein Schüler Wachter am 12. December 1816 an ihn geschrieben hat. Auch schreibt Gauss selbst unterm 28. April 1817 an Olbers: „Ich komme immer mehr zu der Ueberzeugung, dass die Nothwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom menschlichen Verstande, noch für den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem andern Leben zu andern Einsichten in das Wesen des Raumes, die uns jetzt unerreichbar sind. Bis dahin müsste man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen."

Demnach dürfen wir annehmen, dass Bartels im persönlichen Verkehre mit Gauss nicht wesentlich mehr über die Parallelenfrage erfahren hat als das, was er ebensogut aus Gesprächen mit Kästner oder aus den damaligen Lehrbüchern der Geometrie, insbesondre aus

den „Eléments" Legendres entnehmen konnte, die Einsicht nämlich, dass jedenfalls alle bisherigen Versuche, die Euklidische Parallelentheorie in Ordnung zu bringen, missglückt waren. Ausser dieser Einsicht, zu der er höchst wahrscheinlich auch schon unabhängig von Gauss gekommen war, brachte er im günstigsten Falle noch einige Zweifel an der Richtigkeit des Euklidischen Parallelenaxioms nach Kasan mit. Hätte nun Lobatschefskij schon in seinen 1815 und 16 gehaltenen Vorlesungen derartige Zweifel ausgesprochen, so könnte man allerdings mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, dass er dazu durch Mittheilungen veranlasst war, die ihm sein Lehrer Bartels über Ideen von Gauss gemacht hatte. Da aber Lobatschefskij damals keine Spur von solchen Zweifeln verrieth, vielmehr noch ganz fest auf dem Boden der Euklidischen Geometrie stand und das Parallelenaxiom zu beweisen suchte, da er ausserdem noch eine ganze Reihe von Jahren gebraucht hat, um sich über den Euklidischen Standpunkt zu erheben, so erscheint es vollständig ausgeschlossen, dass er einer durch Bartels vermittelten Anregung von Gauss irgend etwas Wesentliches verdankt haben sollte.

Diese Auffassung wird in erwünschter Weise durch Mittheilungen bestätigt, die ich dem berühmten Astronomen Otto Struve verdanke, wohl dem einzigen noch Lebenden, der Bartels, Gauss und Lobatschefskij alle drei persönlich gekannt hat. Als nämlich Struve in den Jahren 1835 und 36 Vorlesungen bei Bartels hörte, nannte dieser wiederholt Lobatschefskij als einen seiner ersten und begabtesten Schüler in Kasan. Lobatschefskij hatte damals bereits seine ersten Schriften über die Grundlagen der Geometrie an Bartels geschickt, aber Bartels sah diese Schriften, wie Struve schreibt, „mehr als interessante geistreiche Speculationen an, wie als ein die Wissenschaft förderndes Werk". Auch erinnert sich Struve nicht, „dass Bartels je von anklingenden Ideen von Gauss gesprochen hätte".

Hiernach können die Gespräche über die Grundlagen der Geometrie, die Bartels etwa mit Gauss geführt hat, keinen besonders nachhaltigen Eindruck hinterlassen haben: Bartels hätte sonst gewiss die Arbeiten seines ehemaligen Schülers anders beurteilt.

Auf Grund der angestellten Erwägungen dürfen wir wohl mit ziemlicher Sicherheit behaupten, dass Lobatschefskij völlig unabhängig von Gauss zu seiner nichteuklidischen Geometrie gelangt ist. Aus den Vorlesungen von Bartels und aus Gesprächen mit diesem, sowie durch das Studium geometrischer Lehrbücher, insbesondre der Legendreschen „Eléments", hatte Lobatschefskij zunächst die Einsicht gewonnen, die damals schon lange Allgemeingut aller denkenden

Mathematiker war, dass nämlich die Parallelentheorie bisher durchaus ungenügend begründet war. Nach jahrelangem Nachdenken über die Frage erkannte er schliesslich ganz selbständig den wahren Grund dafür in der Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms und gelangte durch angestrengte Arbeit zu einem ausgeführten Systeme einer von diesem Axiome unabhängigen Geometrie.

Wir fügen gleich hinzu, dass nach unsrer Ueberzeugung Johann Bolyai ebensowenig irgendwie von Gauss beeinflusst gewesen ist. Johanns Vater Wolfgang hatte zwar als Student mit seinem Studiengenossen Gauss über die Grundlagen der Geometrie verhandelt, aber aus ihrem Briefwechsel gewinnt man den Eindruck, dass sie damals, wenigstens auf diesem Gebiete, einander als vollkommen gleichberechtigt betrachteten, dass keiner sich für dem andern überlegen ansah. Da nun die Gaussischen Briefe in der Zeit vom November 1804 bis zum März 1832, wo Gauss eben den Appendix J. Bolyais erhalten hatte, die Parallelenfrage gar nicht berühren, so kann J. Bolyai durch seinen Vater von Gaussischen Ideen nichts weiter erfahren haben, als was Gauss bis Ende 1804 erkannt hatte. Eine eigentliche Anregung bei seinen Untersuchungen kann daher auch J. Bolyai von Gauss nicht empfangen haben, und den Anstoss zu seiner ganzen Arbeit hat sicher der Umstand gegeben, dass alle Anstrengungen seines Vaters erfolglos geblieben waren; hat doch W. Bolyai sogar in väterlicher Besorgniss seinen Sohn vor der Beschäftigung mit der Parallelentheorie gewarnt, was selbstverständlich das Gegentheil der beabsichtigten Wirkung hervorrief.

Um Alles noch einmal zusammenzufassen: wir stehen vor der merkwürdigen Thatsache, dass im Verlaufe von wenig mehr als zehn Jahren vier Männer ganz unabhängig von einander den Weg gefunden haben, auf dem die in der Euklidischen Parallelentheorie liegende Schwierigkeit überwunden werden kann, zuerst Gauss und Schweikart, wie es scheint nahezu gleichzeitig, nach diesen beiden, wieder ungefähr gleichzeitig, Lobatschefskij und J. Bolyai. Die drei erstgenannten waren reife Männer, als sie die Lösung des Räthsels fanden, und bei jedem von ihnen waren lange Jahre vergeblicher Anstrengungen vorhergegangen, während J. Bolyai schon als einundzwanzigjähriger Jüngling die Wahrheit erkannte, nachdem er sich höchstens drei bis vier Jahre ernstlich mit dem Gegenstande beschäftigt hatte. Dafür hatte aber auch Johanns Vater Wolfgang Bolyai länger als zwei Jahrzehnte vergeblich mit den Schwierigkeiten der Parallelentheorie gerungen: die gewaltige geistige Arbeit, die Gauss, Schweikart und Lobatschefskij jeder für sich allein

vollbracht haben, vertheilt sich eben bei den beiden Bolyai auf zwei Generationen.

Fast noch merkwürdiger als jene Thatsache ist die andre, dass damals alle vier nur die eine von den beiden möglichen Lösungen des Parallelenräthsels gefunden haben. Wie es scheint, ist keiner von ihnen auf den Gedanken gekommen, dass auch eine widerspruchsfreie Geometrie der Ebene möglich ist, bei der die Winkelsumme im Dreiecke grösser ist als zwei Rechte. Keiner scheint es der Mühe werth gefunden zu haben, auch diese Annahme über die Winkelsumme näher zu untersuchen und ihre Folgen zu entwickeln, wie es doch Saccheri und Lambert gethan hatten. Allerdings hatten diese es nur gethan, weil sie keinen einfachen Beweis dafür hatten, dass die Winkelsumme nicht grösser als zwei Rechte sein kann, und weil sie die Annahme, sie sei grösser, blos auf diesem etwas umständlichen Wege als unzulässig nachweisen konnten. Dagegen waren sich Gauss, Lobatschefskij und J. Bolyai vollständig klar darüber, dass eben diese Annahme mit der unendlichen Ausdehnung des Raums und mit der unendlichen Länge der geraden Linie unverträglich ist. Aber indem sie die unendliche Länge der Geraden als etwas selbstverständliches voraussetzten, schnitten sie sich selbst den Weg zu der nichteuklidischen Geometrie ab, die aus jener Annahme entspringt und die bei Saccheri und Lambert schon eine vielversprechende Entwickelung gefunden hatte. So ist es gekommen, dass die zweite nichteuklidische Geometrie erst weit später entdeckt wurde. Allem Anscheine nach hat unter jenen dreien nur Gauss, wenigstens nachträglich, ihre Berechtigung erkannt und damit ihre Entdeckung durch Riemann vorweggenommen.

Kapitel VII.

Lobatschefskij als Rektor der Universität Kasan, 1827—1846.

Nach dieser längern Abschweifung kehren wir zur Lebensgeschichte unsers Helden zurück. Wir hatten deren Erzählung in dem Augenblicke abgebrochen, wo Lobatschefskij der physiko-mathematischen Abtheilung seine „Exposition succincte“ vorlegte und damit zum ersten Male einem wenn auch verhältnissmässig kleinen Kreise die Entdeckung mittheilte, die stets als seine hervorragendste Leistung gelten wird. Wir erinnern uns, dass die Universität Kasan damals unter dem verheissungsvollen Eindrucke der Sheltuchinschen Revision stand, durch die sich endlich Aussicht auf Befreiung von dem unerträglichen Zwange

der Magnizkijschen Tyrannei eröffnete. Wir wissen ferner, dass ein Jahr später Mussin-Puschkin zum Kurator der Universität und des ganzen Lehrbezirks Kasan ernannt wurde.

Als der neue Kurator sein Amt übernahm, befand sich die Universität im Zustande vollständigster Verwirrung: die Zahl der Professoren war sehr zusammengeschmolzen und genügte bei Weitem nicht für die Bedürfnisse des Unterrichts, mussten doch nicht wenige Professoren zwei Lehrstühle auf einmal versehen. Die Sammlungen und Institute der Universität waren in Unordnung, ja geradezu verwahrlost, die Finanzen zerrüttet. Das Schlimmste war aber, dass unter den wenigen vorhandenen Professoren auch noch die grösste Uneinigkeit herrschte. Der damalige Rektor, ein Professor Fuchs, der seine Erhebung zu diesem Amte noch Magnizkij zu verdanken hatte, war zwar ein durchaus ehrenwerther und auch persönlich beliebter Mann, entbehrte aber gänzlich der Energie, die dazu gehörte, das Professorenkollegium in Schranken zu halten und den Universitätsunterricht sowie die Verwaltung wieder in geordnete Bahnen zu lenken: in den oft stürmischen Sitzungen war er machtlos und wurde nicht einmal angehört.

Mussin-Puschkin überzeugte sich sehr bald, dass es unbedingt nöthig sei, Fuchs durch eine geeignetere Persönlichkeit zu ersetzen, und mit scharfem Blicke erkannte er eine solche in Lobatschefskij. Er bestimmte deshalb den Senat, Lobatschefskij zum Rektor zu wählen, obgleich dieser erst dreiunddreissig Jahre zählte und obgleich von den drei Jahren, auf die man Fuchs gewählt hatte, noch nicht einmal das zweite abgelaufen war. Die in der Geschichte der Universität Kasan denkwürdige Wahl fand am 3. (15.) Mai 1827 statt und am 30. August (11. September) 1827 trat Lobatschefskij sein Amt an.

Welch glücklichen Griff man mit der von Puschkin empfohlenen Wahl gethan hatte, zeigte sich bald. In der That war Lobatschefskij ganz der richtige Mann für seinen Posten.

Schon das Beispiel, das er durch seinen unermüdlichen, vor keiner Arbeit zurückschreckenden Pflichteifer gab, musste ihm die allgemeine Achtung erwerben und seine Kollegen anspornen ihre Pflicht zu thun, die während der letzten Jahre gar mancher von ihnen gröblich vernachlässigt hatte. Vor allen Dingen aber wusste er durch entschiedenes, jedoch immer gerechtes und unparteiisches Auftreten die Einigkeit im Senate der Universität wiederherzustellen, sodass die unfruchtbaren Zänkereien allmählich aufhörten und die Universitätsangelegenheiten wieder ruhig und sachgemäss behandelt wurden. Er achtete jede von der seinigen abweichende Meinung und suchte die

Gegner nur durch das Gewicht seiner Gründe zu überzeugen. War ihm das in der Sitzung selbst nicht gelungen, so nahm er die Kollegen, die sich noch nicht hatten belehren lassen, mit auf seine Wohnung, wo bei einer Tasse Thee und vielleicht auch bei einer Pfeife oder Cigarre — Lobatschefskij war nämlich keineswegs ein Verächter des Tabaks — die Frage noch einmal in aller Ruhe durchgesprochen wurde, und da gelang es ihm in der Regel, die vorhandenen Meinungsverschiedenheiten auszugleichen und seine Gegner zu bekehren, ohne dass er die Entscheidung des Kurators anzurufen brauchte. Es wird erzählt, dass er sich nur ein einziges Mal zu diesem äussersten Schritte genöthigt sah, nämlich gegenüber einem Professor der Anatomie, der sich durchaus nicht daran gewöhnen wollte, seine Vorlesungen regelmässig zu halten, und bei dem alles gütliche Zureden nichts half, obgleich schliesslich im ganzen Senate niemand mehr auf seiner Seite stand. Wie ernst es Lobatschefskij überhaupt mit seinen Pflichten als Rektor nahm und wie gewissenhaft er bei der Leitung der Verhandlungen des Senats verfuhr, das geht ganz besonders deutlich aus einer Thatsache hervor, die Janischefskij in seiner Biographie berichtet: Unter den sämtlichen Protokollen über die Senatssitzungen, die während der vielen Jahre abgehalten worden sind, in denen Lobatschefskij Rektor war, findet man kein einziges, das nicht eine von ihm eigenhändig geschriebene Entscheidung enthielte, mit genauer Angabe der Unterlagen und Beweggründe.

Nicht geringere Verdienste erwarb sich Lobatschefskij um die Sammlungen und Institute der Universität, die unter der Vernachlässigung der letzten Jahre ganz besonders gelitten hatten.

Vor allen Dingen galt es, die Universitätsbibliothek endlich in Ordnung zu bringen und wirklich brauchbar zu machen. Lobatschefskij hatte zwar, wie wir wissen, die Verwaltung der Bibliothek schon im Oktober 1825 übernommen, aber da man ihn ohne jede Unterstützung gelassen hatte, war auch er nicht im Stande gewesen, die ungeheure Arbeit zu bewältigen, die hier der Erledigung harrte. Sogleich nach der Ernennung Mussin-Puschkins wendete er sich daher an diesen, um die nöthigen Hülfskräfte zu erhalten. Es wurde denn auch eine Kommission niedergesetzt, die unter Lobatschefskijs Leitung die vorhandenen Bücher zu ordnen und Kataloge herzustellen hatte. Da diese Kommission dem Kurator wöchentlich über ihre Thätigkeit berichten musste, so machte ihre Arbeit rasche Fortschritte und wurde schon im folgenden Jahre, also 1828, beendet. Erst jetzt konnte man ganz übersehen, wie grosse Einbusse die Bibliothek durch die Nachlässigkeit ihrer früheren Verwalter erlitten hatte: auf 750

Rubel berechnete die Kommission den Werth der verschwundenen Bücher und auf 4500 den der nicht mehr vorhandenen Zeitschriftenbände. Diese Lücken konnten selbstverständlich nur nach und nach ergänzt werden, doch that Lobatschefskij sein Möglichstes, um das zu erreichen, denn er beantragte öfters und niemals vergeblich beim Ministerium die Bewilligung ausserordentlicher Geldmittel zur Vervollständigung der Bibliothek. Noch bis zum Jahre 1835 behielt er das Amt des Bibliothekars bei und übergab es dann einem von ihm selbst empfohlenen Nachfolger.

Gleich nach seinem Amtsantritte hatte Mussin-Puschkin noch eine andre Kommission niedergesetzt, deren Bestimmung war, die übrigen Institute und Sammlungen der Universität nachzusehen und die vorhandenen Bestände festzustellen; auch an dieser war Lobatschefskij als Mitglied betheiligt. Wie nicht anders zu erwarten, machte man hier ebenso betrübende Erfahrungen wie bei der Bibliothek. Zum Beispiele waren unter Magnizkij verschiedene werthvolle Sammlungen für das mineralogische Kabinet angekauft worden; die waren aber nicht einmal ausgepackt, sondern lagen noch in den Kisten, in denen sie angekommen waren, eine von ihnen war sogar spurlos verschwunden und die dafür verantwortlichen Professoren waren entweder gestorben oder hatten die Universität längst verlassen. Mehrere Sammlungen von Gesteinen und Erzen, die Lobatschefskijs Bruder Alexej auf einer Reise nach Sibirien zusammengebracht und an die Universität geschickt hatte, wurden erst nach langem vergeblichen Suchen ganz zufällig wieder aufgefunden; auch sie waren noch unausgepackt. Man kann sich hiernach ungefähr vorstellen, eine wie unangenehme und schwierige Arbeit die Kommission zu leisten hatte, doch wurde auch diese Arbeit schliesslich glücklich zu Ende geführt. Nachdem so ermittelt war, was in den Sammlungen eigentlich hätte vorhanden sein sollen und was wirklich noch vorhanden war, konnte man daran gehen, sie systematisch zu ordnen und möglichst zweckmässig aufzustellen. Selbstverständlich sorgten Puschkin und Lobatschefskij dafür, dass das geschah; auch wurden reichliche Mittel flüssig gemacht, um die Sammlungen planmässig zu vervollständigen.

Unter den verschiedenen von uns erwähnten Uebelständen, die Puschkin an der Universität Kasan bei Uebernahme seines Amtes vorfand, war nicht der geringste der, dass die Zahl der noch vorhandenen Professoren viel zu klein war, um alle Lehrfächer auch nur einigermassen genügend zu besetzen. Puschkin und Lobatschefskij liessen es sich selbstverständlich sehr angelegen sein, diesem Mangel nach Möglichkeit abzuhelfen, doch war das keineswegs leicht, da es

damals überhaupt bei allen russischen Universitäten sehr an Lehrkräften, besonders an einheimischen, fehlte. Sie sahen sich daher, wenigstens in den ersten Jahren, genöthigt, wieder zu dem Auskunftsmittel der Berufung deutscher Professoren zu greifen, doch trafen sie zugleich geeignete Massregeln, um die allmähliche Heranbildung einer genügenden Anzahl einheimischer Lehrkräfte zu sichern. So wurden einzelne besonders begabte junge Leute zu ihrer weiteren Ausbildung ins Ausland oder nach Petersburg geschickt; namentlich aber diente diesem Zwecke die von Lobatschefskij angeregte Umgestaltung des mit der Universität verbundenen pädagogischen Instituts.

Dieses war, wie wir wissen, früher errichtet worden, um den Kandidaten und Magistern Gelegenheit zu bieten, sich auf ihren künftigen Lehrerberuf vorzubereiten. Unter Bronners Direktion hatte es seine Bestimmung ganz gut erfüllt, aber nachdem Bronner 1819 Kasan verlassen hatte, war es vollständig in Verfall gerathen, da Magnizkij die Direktion ganz unfähigen Menschen anvertraut hatte: war doch einer der von ihm ernannten Nachfolger Bronners vorher Postbeamter gewesen! Lobatschefskij war zweifellos schon beim Antritt seines Rektorats von der Reformbedürftigkeit des pädagogischen Instituts überzeugt, doch hinderten ihn jedenfalls zunächst dringendere Aufgaben, die Reform in Angriff zu nehmen. Erst im Jahre 1829 that er das. Er stellte dem Senate der Universität vor, dass das pädagogische Institut in seiner bisherigen Verfassung unmöglich seine Aufgabe erfüllen könne, da ein einzelner Mann, möge er auch noch so hervorragend sein, nicht im Stande sei, allen Wissenschaften gerecht zu werden. Er schlug deshalb vor, es solle zukünftig eine grössere Anzahl von Professoren an dem Institute mitwirken, und zwar solle jeder die pädagogische Ausbildung der Kandidaten und Magister übernehmen, die sich seinem besondern Fache widmeten. Nachdem diese Vorschläge die Billigung des Senats und des Kurators gefunden hatten, wurde das pädagogische Institut ihnen gemäss umgestaltet, und die Universität Kasan erhielt so eine Anstalt, in der sowohl für die Gymnasien des Kasaner Lehrbezirks als auch für die Universität selbst geeignete Lehrkräfte herangebildet wurden. Dass Lobatschefskij die pädagogischen Studien der zukünftigen Mathematiklehrer zu leiten übernahm, bedarf kaum der Erwähnung; dass er es in einer äusserst anregenden und gründlichen Weise that, bezeugt Janischefskij, indem er hervorhebt, mit welcher Freude und Genugthuung die damaligen Schüler Lobatschefskijs sich noch 1868 der mathematisch-pädagogischen Anleitung erinnerten, die sie bei ihm genossen hatten.

Ueberhaupt dachte Lobatschefskij von der pädagogischen Auf-

gabe der Universität sehr hoch und verlangte, dass die Hochschule nicht blos eine Anstalt zur Erwerbung von Kenntnissen, sondern auch eine Anstalt zur Erziehung ihrer Schüler sei. Bezeichnend für diese Auffassung ist es, dass er nach dem Antritte seines Rektorats die erste sich ihm bietende Gelegenheit benutzte, um seinen Ansichten über die Erziehung öffentlich Ausdruck zu verleihen. Die Universität Kasan feierte damals ihr Jahresfest am 5. (17.) Juli, weil sie an diesem Tage des Jahres 1814 zum ersten Male als eine sich selbst verwaltende Körperschaft mit selbst gewähltem Rektor und selbst gewählten Dekanen aufgetreten war. Als nun im Jahre 1828 der eben genannte Tag zum ersten Male unter Lobatschefskijs Rektorate begangen wurde, da hielt dieser in der feierlichen Versammlung der Universität eine Rede „Ueber die wichtigsten Gegenstände der Erziehung", in der er sich über die Aufgaben und die Bedeutung der Erziehung aussprach. Er hat seine Rede später, im Jahre 1832, im Kasaner Boten drucken lassen, und, soweit man nach den von Wassiljef aus ihr mitgetheilten Proben urteilen kann, findet sich darin zwar nicht wenig Phrasenhaftes, doch spricht sich überall eine auf das Ideale gerichtete Gesinnung aus, die nur das Beste der Universität und des Vaterlandes im Auge hat.

Wir haben zu schildern versucht, wie rastlos und unermüdlich Lobatschefskij als Rektor thätig war, um die Universität Kasan aus dem Zustande kläglichsten Verfalls, in den sie durch Magnizkij gerathen war, emporzuheben. Der Erfolg konnte nicht ausbleiben. Nach Verlauf weniger Jahre war die Universität vollständig reorganisirt und in den Stand gesetzt, ihre Aufgabe als Unterrichtsanstalt und als Pflanzstätte wissenschaftlicher Studien zu erfüllen. Unter diesen Umständen ist es kein Wunder, dass Mussin-Puschkin zu Lobatschefskij, der sein Vertrauen so glänzend gerechtfertigt hatte, eine aufrichtige und herzliche Freundschaft fasste und dass er keine der Fragen, die in seiner Stellung als Kurator des Lehrbezirks Kasan an ihn herantraten, erledigte, ohne den Rath Lobatschefskijs eingeholt zu haben. Ebenso erkannten auch Lobatschefskijs Kollegen dessen Verdienste um die Universität rückhaltlos an, indem sie ihn immer und immer wieder zum Rektor wählten, so dass man ihn mit gewissem Rechte als den Rector perpetuus der Universität Kasan bezeichnen konnte. Im Ganzen ist er sechsmal hinter einander zum Rektor gewählt worden — zweimal auf je drei Jahre, dann auf je vier — und neunzehn Jahre lang hat er dieses Amt ununterbrochen bekleidet, bis er 1846 von seiner Stellung als Professor entbunden wurde und infolgedessen auch das Rektorat, das ihm im Jahre vorher zum sechsten Male übertragen worden war, niederlegte.

Während dieser langen Zeit hörte Lobatschefskij nicht auf, für das Wohl der Universität zu arbeiten und deren Blüthe nach Kräften zu fördern; da wir jedoch keine Geschichte der Universität Kasan schreiben wollen, so müssen wir uns eine eingehende Schilderung dieser seiner amtlichen Wirksamkeit versagen: nur das Wichtigste wollen wir kurz besprechen und uns dann wieder seiner wissenschaftlichen Thätigkeit zuwenden.

Im Jahre 1830 kam die Cholera, die damals ihren Zug durch ganz Europa begonnen hatte, auch nach Kasan. Sobald die ersten Spuren der Seuche bemerkt worden waren, machte Lobatschefskij den Gouverneur darauf aufmerksam, dieser aber wollte noch nicht recht an das Vorhandensein der Seuche glauben, sondern ordnete erst eine ärztliche Untersuchung aller verdächtigen Kranken an. Als nun am 12. (24.) September alle Aerzte der Stadt das Auftreten der Cholera für zweifellos erklärt hatten, da berief Lobatschefskij — Puschkin war damals abwesend — sofort eine ausserordentliche Senatssitzung, in der man sich dafür entschied, die Vorlesungen zu schliessen, und ihn beauftragte, die nöthigen Massregeln zu treffen, um die in den Universitätsgebäuden wohnenden Professoren, Beamten und Studenten vor der Ansteckung zu sichern.

Am nächsten Tage begab sich Lobatschefskij zum Gouverneur, um mit diesem die zu treffenden Massregeln zu besprechen, erfuhr aber dort, dass während der Nacht die Stadt geschlossen und abgesperrt worden war, als wäre sie von der Pest heimgesucht. Er eilte daher sofort nach der Universität zurück und ordnete an, dass jeder Verkehr zwischen den Bewohnern der Universität und denen der übrigen Stadtviertel aufhören solle: alle Thore der Universität wurden bis auf eines gesperrt, und auch durch dieses eine wurde der Zutritt nur Aerzten gestattet. Da ausser den ständigen Bewohnern der Universität noch andre Studenten und mehrere Universitätsbeamte mit ihren Familien auf dem Gebiete der Universität eine Zuflucht gesucht hatten, so belief sich die Zahl der dort Eingeschlossenen auf 560 Personen, darunter im Ganzen neun Professoren und Adjunkten. Lobatschefskij sorgte dafür, dass alle diese auf Staatskosten verpflegt wurden; die Herbeischaffung der dazu nöthigen Lebensmittel geschah unter Aufbietung aller der Vorsichtsmassregeln, die man bei den damals herrschenden übertriebenen Vorstellungen von der Ansteckungsgefahr der Cholera für nöthig hielt. Für diese Vorstellungen bezeichnend ist es, dass an dem einen, nicht vollständig gesperrten Thore nur solche Schriftstücke angenommen werden durften, die aus losen Blättern bestanden, weil man glaubte, die zum Heften benutzten Fäden könnten

die Ansteckung besonders leicht übertragen; aber auch diese losen Blätter mussten erst noch mit Chlordämpfen desinficirt oder mit Chlorwasser abgewaschen werden! Besonders streng hielt Lobatschefskij darauf, dass auf dem ganzen Gebiete der Universität die grösste Reinlichkeit herrschte und dass die Luft durch häufige Räucherungen mit Chlor und Essig gereinigt wurde. Für die an der Cholera Erkrankten wurden zwei Lazarethe eingerichtet; die Bettwäsche und die Kleidungsstücke jedes Gestorbenen wurden verbrannt.

Anderthalb Monate lang blieb die Universität auf diese Weise von jedem Verkehre mit der Stadt abgeschlossen; dank den von Lobatschefskij getroffenen Massregeln kamen in dieser Zeit auf dem Universitätsgebiete nur vierzig Cholerafälle vor, von denen sechzehn tödtlich verliefen — einer der Professoren war unter den Gestorbenen — während in der übrigen Stadt die Sterblichkeit unverhältnissmässig viel grösser war. Die Vorlesungen konnten erst am 25. November (7. December) wieder aufgenommen werden.

Wir haben früher (S. 366) des Antheils gedacht, den Lobatschefskij bereits in den zwanziger Jahren an der Erbauung der eigentlichen Universitätsgebäude genommen hatte. Im Jahre 1833 wurde abermals ein Ausschuss niedergesetzt, der den Bau einer grossen Anzahl von Universitätsinstituten beaufsichtigen sollte. Lobatschefskij wurde wieder Vorsitzender dieses Ausschusses, und unter seiner Leitung entstanden im Laufe der Jahre 1833—41 die Sternwarte, das Bibliotheksgebäude, das physikalische Institut, die Anatomie und die Klinik. Er kümmerte sich dabei um alle Einzelheiten, und ihm war es hauptsächlich zu danken, dass bei diesen Bauten gegenüber den Voranschlägen eine Summe von nicht weniger als 49000 Silberrubeln erspart wurde. Aber die Freude über die Vollendung der neuen stattlichen Gebäude blieb nicht lange ungetrübt. Eine Feuersbrunst, die im August 1842 in Kasan wüthete und die halbe Stadt in Asche legte, zerstörte die Sternwarte und einige andre Universitätsgebäude; doch hatten die energischen Massregeln, die Lobatschefskij traf, wenigstens so viel Erfolg, dass man die übrigen Universitätsgebäude, namentlich die Bibliothek, rettete und auch die innere Einrichtung der Sternwarte bergen konnte. Der Wiederaufbau der abgebrannten Gebäude wurde auch jetzt unter Lobatschefskijs Leitung ausgeführt und so gefördert, dass er bereits 1844 beendet war.

Vergessen wir übrigens nicht, dass sich Lobatschefskijs amtliche Thätigkeit keineswegs auf die Universität beschränkte. Er war lange Zeit hindurch Vorsitzender der Kommission, vor der die zukünftigen Studenten die zur Aufnahme in die Universität erforderliche

Prüfung abzulegen hatten. Als solcher hatte er vielfache Gelegenheit auf den Gymnasialunterricht einzuwirken und für dessen Besserung zu sorgen. Auch wurde er mehrmals vom Unterrichtsministerium mit der Revision von Gymnasien beauftragt: so revidirte er vom December 1835 bis zum März 1836 alle Gymnasien der Gouvernements Nishnij-Nowgorod und Simbirsk, und 1842 hatte er dieselbe Aufgabe im Gouvernement Pensa.

Neben den aufreibenden Geschäften, die das Rektorat mit sich brachte, vernachlässigte Lobatschefskij seine Lehrthätigkeit keineswegs. In den ersten Jahren musste er, wie wir wissen, neben der Mathematik auch noch die theoretische Physik und die Mechanik in den Kreis seiner Vorlesungen ziehen. Nachdem aber 1833 E. Knorr als Professor der Physik angestellt worden war und bald auch die Mechanik ihren eigenen Vertreter erhalten hatte, konnte sich Lobatschefskij in der Hauptsache auf Vorträge über reine Mathematik beschränken; doch blieb die Zahl der Vorlesungen, die er hielt, und der mathematischen Fächer, die er darin behandelte, immerhin recht beträchtlich. Dass er daneben noch besondre Lehrverpflichtungen an dem pädagogischen Institute der Universität übernahm, haben wir schon gesehen. Doch auch das war ihm noch nicht genug. Er hielt mehrmals öffentliche, jedermann zugängliche Vorlesungen über Physik, die zum Theile auch von Versuchen begleitet waren, und suchte dadurch zur Bildung des Volkes beizutragen. Insbesondre hielt er 1839—40 für den Handwerkerstand eine Reihe von Vorträgen unter dem Titel: „Volksthümliche Physik“.

Endlich dürfen wir nicht unerwähnt lassen, dass er neben der geistigen Ausbildung auch die körperliche nicht vernachlässigt wissen wollte. Auf sein Betreiben wurde 1834 an den Gymnasien und an der Universität das Turnen eingeführt und auch für die Pflege des Tanzens gesorgt. Puschkin theilte übrigens seine Ansichten über den Werth solcher Uebungen und unterstützte ihn bei diesen Bestrebungen.

Es ist erfreulich berichten zu können, dass Lobatschefskijs Wirken bei der vorgesetzten Behörde auch die äussere Anerkennung fand, die es in so reichem Masse verdiente. Im September 1831 wurde ihm der allerhöchste Dank seines Kaisers für sein Verhalten während der Choleraepidemie zu Theil. Im Mai 1833 verlieh ihm der Zar einen Brillantring und im December desselben Jahres den Stanislausorden dritter Klasse. Wiederholt sprach ihm das Ministerium seine besondre Anerkennung aus für die Verdienste, die er sich um das Rechnungswesen der Universität und des Bezirks erworben hatte. Nach

der Revision der Gymnasien des Gouvernements Nishnij erhielt er den St. Annen-Orden zweiter Klasse. Für seine Bemühungen zur Rettung der Universitätsgebäude während der Feuersbrunst von 1842 erntete er wieder die allerhöchste Anerkennung des Monarchen und erhielt überdies den Wladjimir-Orden dritter Klasse. Noch zweimal wurde er durch Ordensverleihungen ausgezeichnet, und dass ihm die üblichen Titel: Staatsrath und wirklicher Staatsrath und die Auszeichnungen für zwanzig-, fünfundzwanzig- und dreissigjährige Dienstzeit verliehen wurden, versteht sich von selbst.

Kapitel VIII.

Lobatschefskijs wissenschaftliche Veröffentlichungen, insbesondre seine geometrischen Arbeiten in der Zeit von 1827—1846.

Eine so umfangreiche und aufreibende amtliche Thätigkeit, wie sie Lobatschefskij während seines neunzehnjährigen Rektorats entfaltet hat, würde die meisten andern Menschen vollständig in Anspruch nehmen und ihnen zu wissenschaftlichen Arbeiten keine Zeit übrig lassen. Nicht so bei ihm: es ist wahrlich staunenswerth, was er in dieser Zeit, trotz seiner Ueberhäufung mit Vorlesungen und Verwaltungsgeschäften, auch noch auf wissenschaftlichem Gebiete geleistet hat. Wir wollen jetzt einen flüchtigen Ueberblick über diese Seite seiner Thätigkeit geben, werden aber hier nur auf die geometrischen Schriften etwas näher eingehen, während wir uns bei den nichtgeometrischen mit einer blosen Aufzählung der einzelnen Abhandlungen begnügen.

In den Jahren 1829 und 30 veröffentlichte Lobatschefskij im Kasaner Boten endlich wenigstens einen Auszug aus der „Exposition succinte", die er 1826 der physiko-mathematischen Abtheilung vorgelegt hatte. Dieser in russischer Sprache abgefasste Auszug, der den Titel trägt: „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie", sichert ihm, wie wir schon erwähnt haben, die Priorität der Veröffentlichung gegenüber J. Bolyai, dessen Appendix erst 1831 gedruckt und 1832 erschienen ist. Dafür ist aber wieder zu berücksichtigen, dass J. Bolyais Appendix nur eine Anzahl Sätze voraussetzt, die Euklid unabhängig vom Parallelenaxiome bewiesen hat, sonst aber eine wirklich vollständige Begründung der nichteuklidischen Geometrie enthält, die allerdings äusserst knapp gefasst ist und deshalb vom rein geometrischen

Standpunkte aus manches zu wünschen übrig lässt; während dagegen der von Lobatschefskij veröffentlichte Auszug aus der „Exposition“ zwar Andeutungen darüber enthält, wie man vom Begriffe der Kugelfläche ausgehend die ganze Geometrie aufbauen kann, andrerseits jedoch eine Reihe neuer, der nichteuklidischen Geometrie eigenthümlicher Sätze ohne Beweise mittheilt. Hinwiederum darf man nicht übersehen, dass bei Lobatschefskij die neue Geometrie gleich in einer für Anwendungen unmittelbar brauchbaren Form erscheint: die zur Berechnung geometrischer Figuren nöthigen Formeln sind systematisch entwickelt, und eine grosse Anzahl dahin gehöriger Aufgaben ist vollständig gelöst. J. Bolyai giebt in dieser Beziehung nur das allernothdürftigste: man sieht zwar, dass er den Gegenstand vollständig beherrscht, aber man würde doch noch eine beträchtliche geistige Arbeit aufwenden müssen, wollte man auf Grund der Andeutungen des Appendix selbständig derartige Aufgaben in Angriff nehmen.

Ferner wollen wir noch auf Folgendes aufmerksam machen: Lobatschefskij hat später in den „Neuen Anfangsgründen“ das nachgeholt, was in seiner ersten Arbeit „Ueber die Anfangsgründe“ fehlte, er hat eine vollständige, zusammenhängende Entwickelung und Darstellung seiner neuen Geometrie geliefert, eine Darstellung, an der auch vom rein geometrischen Standpunkte aus verhältnissmässig nicht sehr viel auszusetzen ist. Er war dabei sichtlich bestrebt, die Anfänge der Geometrie von jeder Beimischung der Analysis frei zu halten und die Geometrie rein synthetisch soweit zu entwickeln, bis man im Stande ist, „jede Abhängigkeit durch Gleichungen darzustellen und für jede Art geometrischer Grössen Ausdrücke zu geben“. Das zeigt sich besonders darin, dass er, bewusst oder unbewusst, in den „Neuen Anfangsgründen“ von der Stetigkeit nur sehr sparsamen Gebrauch macht und dass die Zahl der Stellen, wo er die Stetigkeit benutzt, während sie doch vermieden werden kann, äusserst gering ist. Dagegen hat J. Bolyai zwar auch angefangen, eine grosse und zusammenhängende Darstellung der Geometrie auszuarbeiten, aber was er niedergeschrieben hat, blieb in seinen Papieren vergraben und ist niemals erschienen. Was davon zur Veröffentlichung geeignet ist, wird Stäckel in einiger Zeit der Allgemeinheit zugänglich machen, und es wird sich dann wohl zeigen, dass J. Bolyai bei seiner Darstellung nach ähnlichen Grundsätzen zu Werke gehen wollte, wie sie Lobatschefskij thatsächlich befolgt hat. In dem Appendix freilich hat J. Bolyai unter dem Zwange des Strebens nach äusserster Kürze und Knappheit einen nur allzu ausgiebigen Gebrauch von der Stetigkeit gemacht.

Um endlich die Vergleichung der beiden Begründer der nicht-

euklidischen Geometrie zum Abschluss zu bringen und Licht und Schatten in gerechter Weise zu vertheilen, sei noch folgender Thatsache gedacht: In seinem Appendix geht J. Bolyai insbesondre auch auf die der nichteuklidischen Geometrie eigenthümlichen Konstruktionsaufgaben ein. Zum Beispiel giebt er sehr elegante Lösungen für die beiden Aufgaben: durch einen gegebenen Punkt die Parallelen zu einer gegebenen Geraden zu ziehen und die Gerade zu zeichnen, die auf dem einen Schenkel eines spitzen Winkels senkrecht steht und zu dem andern Schenkel parallel ist; auch zeigt er, dass im Falle der nichteuklidischen Geometrie eine geometrische Quadratur des Kreises möglich ist. In den „Neuen Anfangsgründen“ Lobatschefskijs und in dessen übrigen Arbeiten werden Fragen dieser Art nirgends berührt, nur in der ersten Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe“ giebt es Spuren, aus denen mit grosser Wahrscheinlichkeit hervorgeht, dass auch er im Besitze von Konstruktionen war, die zur Lösung der beiden zuerst erwähnten Aufgaben dienen können.

Ausser der Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe“ enthält der Kasaner Bote nur noch zwei Arbeiten von Lobatschefskij: einen 1828 veröffentlichten Auszug aus einer akustischen Abhandlung von Wheatstone und die erst 1832 gedruckte Rektoratsrede aus dem Jahre 1828. Im Laufe der Zeit stellte sich nämlich immer deutlicher heraus, dass der Kasaner Bote nicht lebensfähig war. Ursprünglich enthielt er friedlich neben einander rein wissenschaftliche Arbeiten, populäre Aufsätze, Uebersetzungen aus fremden Sprachen, politische Nachrichten und Regierungsverordnungen. Dieses Gemisch der verschiedenartigsten Gegenstände konnte niemanden befriedigen, zumal da die politischen Nachrichten wegen des seltenen Erscheinens der Zeitschrift jedesmal längst veraltet waren. Man hatte deshalb seit 1828 die politischen Nachrichten allwöchentlich als „Zugabe zum Kasaner Boten“ herausgegeben, während von der eigentlichen Zeitschrift alle Monate oder alle zwei Monate ein Heft erschien. Aber auch das hatte nichts geholfen, der Absatz blieb ganz unbedeutend und damit selbstverständlich auch die Auflage. Heutzutage würde man schwerlich noch ein Exemplar des Kasaner Boten von 1829 und 30 zu kaufen bekommen, wollte man es auch mit Gold aufwiegen.

Unter diesen Umständen wurde das Erscheinen des Kasaner Boten mit Ende des Jahres 1832 eingestellt. Aber Lobatschefskij sorgte für einen Ersatz. Auf sein Betreiben wurde nämlich jetzt eine rein wissenschaftliche Zeitschrift geschaffen, die nur Originalarbeiten enthalten sollte. Es sind das die noch heute bestehenden Utschónyja Sapíski, die Gelehrten Schriften der Kasaner Universität, und ihre

Gründung ist nicht das kleinste unter den vielen Verdiensten, die sich Lobatschefskij um diese Hochschule erworben hat.

Im Jahre 1834 erschien das erste Heft der Gelehrten Schriften mit einer Vorrede, in der Lobatschefskij die Vorgeschichte und den Plan der neuen Zeitschrift schildert. Auch enthielt schon dieses erste Heft eine wissenschaftliche Arbeit von seiner Hand, in der er seine auf S. 359 erwähnten Untersuchungen über Gleichungen von der Form: $x^n - 1 = 0$ fortsetzte. Ebenso brachte das zweite Heft des Jahrgangs 1834 eine Abhandlung von ihm über trigonometrische Reihen, und auch in den Jahren 1835—38 war er es hauptsächlich, der den Inhalt der Gelehrten Schriften bestritt. Ausser einer zweiten grossen Abhandlung über unendliche Reihen, die 1835 erschien, bezogen sich diese Arbeiten, drei an der Zahl, sämmtlich auf seine neue sogenannte imaginäre Geometrie.

Der ersten, 1835 erschienenen Arbeit, gab er sogar den Titel „Imaginäre Geometrie“, statt aber seine neue Geometrie Schritt für Schritt zu entwickeln, wie er es in der Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie“ wenigstens bis zu einem gewissen Grade gethan hatte, schlug er hier genau den umgekehrten Weg ein: Er stellte nämlich von vornherein und ganz unvermittelt die Gleichungen, die zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks seiner neuen Geometrie bestehen, als etwas Gegebenes hin und bewies nun erstens, dass diese Gleichungen ein in sich widerspruchsfreies System bilden, und zweitens, dass sie für Dreiecke mit unendlich kleinen Seiten in die Gleichungen der Euklidischen Geometrie übergehen. Diesen letztern Umstand benutzte er, um die in der neuen Geometrie gültigen Ausdrücke für Bogenelemente, Flächenelemente und Raumelemente aufzustellen und löste dann im Grossen und Ganzen dieselben Aufgaben über die Berechnung von Bogenlängen, Flächenräumen und Rauminhalten, die er schon in der Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe“ gelöst hatte.

Eine Art Fortsetzung dieser Arbeit ist die 1836 erschienene: „Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale“, doch ist sie, wie schon ihr Titel zeigt, hauptsächlich bestimmt, die Verwendbarkeit der neuen Geometrie für die Integralrechnung zu zeigen, ein Gesichtspunkt, der auch schon in den beiden frühern geometrischen Arbeiten stark hervorgehoben wird.

Die dritte und umfangreichste Arbeit endlich heisst: „Neue Anfangsgründe der Geometrie“ und vertheilt sich von 1835 bis 1838 auf nicht weniger als sechs Hefte der Gelehrten Schriften. Sie ist ein vollständiges Lehrbuch der neuen Geometrie von den ersten Anfängen

an und führt diese soweit, bis die Gleichungen für die geradlinigen und die sphärischen Dreiecke aufgestellt sind. Allerdings fallen die beiden letzten, 1838 erschienenen Kapitel der „Neuen Anfangsgründe" ganz aus dem Rahmen des Uebrigen heraus und sind wohl nur aus rein zufälligen Gründen unter demselben Titel veröffentlicht; sie haben nämlich mit der imaginären Geometrie gar nichts zu thun und beschäftigen sich nur mit der Auflösung der geradlinigen Dreiecke der Euklidischen Geometrie und mit der Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke.

Man kann nicht umhin die „Neuen Anfangsgründe" als eine wirklich meisterhafte Leistung zu bezeichnen, denn so wenig man leugnen wird, dass sie auch ihre Mängel haben, so wenig darf man diesen Mängeln besondres Gewicht beilegen: sie verschwinden neben den Vorzügen des Werkes fast ganz. Bedauerlicher Weise waren aber Lobatschefskijs Landsleute noch nicht reif, diese Leistung zu würdigen: gerade seine geometrischen Arbeiten begegneten in Russland überall entweder vollkommener Gleichgültigkeit oder verständnisslosem Widerspruche.

So erschien z. B. 1834 in der Petersburger Zeitschrift „Syn Otjétschestwa" (Sohn des Vaterlandes) eine geradezu kränkende Besprechung der Arbeit „Ueber die Anfangsgründe". Der offenbar nicht sehr sachkundige Verfasser dieser Besprechung behauptete, die Arbeit tauge nichts, weil er unter den Beispielen ein „abgeschmacktes" Integral gefunden habe. In der 1835 gedruckten „Imaginären Geometrie" beklagt sich Lobatschefskij darüber, dass eine von ihm im November 1834 eingesandte Entgegnung noch jetzt, nach fünf Monaten, nicht aufgenommen worden sei, ja er kommt an einer spätern Stelle derselben Arbeit noch ein zweites Mal auf jene abfällige Kritik zurück und zwar bei Gelegenheit eines Integrals, das nach einer später von Dirichlet eingeführten Benennung als ein Diskontinuitätsfaktor zu bezeichnen wäre. Er meint, der bewusste Recensent müsse entweder recht unerfahren sein oder allzu voreilig mit seinem Urteile, da er solche bereits bei Poisson vorkommende Integrale abgeschmackt nenne. Es scheint, dass jene Entgegnung überhaupt ungedruckt geblieben ist.

Nun ist es allerdings sehr begreiflich, dass die Arbeit „Ueber die Anfangsgründe" nicht verstanden wurde, denn sie stellte in der That für die damalige Zeit an den Leser sehr hohe Ansprüche; dieser musste sich nicht nur in ganz neue, ungewohnte Vorstellungen hineindenken, sondern sah sich auch vor die Aufgabe gestellt, die zahlreichen, oft gar nicht leichten Rechnungen, die Lobatschefskij grössten Theils

nur angedeutet hatte, selbständig auszuführen; nicht zu gedenken der Druckfehler, die diese Aufgabe noch erschwerten. Desgleichen waren auch die „Imaginäre Geometrie“ und die „Anwendung der imaginären Geometrie“ alles andre als leicht lesbar. Dagegen fallen bei den „Neuen Anfangsgründen“ alle diese Entschuldigungsgründe weg, denn von der Einleitung abgesehen, die hie und da dem Verständnisse Schwierigkeiten bereitet, sind die „Neuen Anfangsgründe“ durchaus klar und verständlich geschrieben. Wenn also auch diese Arbeit bei den russischen Mathematikern keine Beachtung und Anerkennung fand, so liegt die Schuld daran lediglich an Lobatschefskijs Landsleuten, nicht an ihm.

Ausser den vorhin erwähnten Veröffentlichungen in den Gelehrten Schriften sind noch eine ganze Reihe andre zu nennen. Im Jahre 1835 gab er sein Lehrbuch der Algebra heraus, dessen Manuskript, wie wir wissen, schon 1825 beendet, aber damals nicht zum Drucke gelangt war. Im folgenden Jahre schickte er nach Moskau eine Abhandlung „Ueber die Bedingungsgleichungen für die Bewegung und die Lage der Hauptdrehungsaxen eines starren Körpers“, die 1835 in den Gelehrten Schriften der Moskauer Universität gedruckt wurde. Hierzu kommen einige Arbeiten in französischer und deutscher Sprache, während die bisher erwähnten alle russisch abgefasst sind.

Die 1835 in den Kasaner Gelehrten Schriften herausgegebene „Imaginäre Geometrie“ ist nichts andres als eine wenig veränderte Bearbeitung einer Abhandlung, die Lobatschefskij schon vorher unter dem Titel „Géométrie imaginaire“ an Crelle geschickt hatte, die aber freilich erst 1837, im 17. Bande des Crelleschen Journals, erschienen ist. Durch die Veröffentlichung dieser Arbeit wollte er jedenfalls seine geometrischen Entdeckungen allen europäischen Mathematikern zugänglich machen, da er ja doch nicht erwarten konnte, dass diese die russischen Arbeiten lesen würden, wenn sie sie überhaupt zu Gesicht bekamen. Leider aber war die in der „Géométrie imaginaire“ gewählte Darstellung zu diesem Zwecke nicht sehr geeignet, ja sie konnte dem Verständnisse und der Verbreitung seiner Ideen nur hinderlich sein: das wird man schon aus dem Wenigen ahnen, was wir vorhin zur Charakterisirung der russischen Bearbeitung der „Géométrie imaginaire“ gesagt haben.

Lobatschefskij mochte das selbst fühlen und entschloss sich daher, in deutscher Sprache eine ganz kurze und möglichst elementare Bearbeitung seiner Geometrie herauszugeben. Diese erschien 1840 in Berlin als selbständiges Schriftchen unter dem Titel: „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien“. Er hatte darin eine

Darstellung gewählt, die allen billigen Anforderungen entsprach. Nur im Anfange waren ohne Beweis einige wenige Sätze zusammengestellt, die er für das Folgende brauchte, die aber schon bei Euklid unabhängig vom Parallelenaxiome bewiesen sind. Alle übrigen Sätze waren streng bewiesen, in der Hauptsache so wie in den „Neuen Anfangsgründen", doch waren auch an mehreren Stellen die Beweise nicht unwesentlich vereinfacht. Die Entwickelung hatte er so weit geführt, dass die Gleichungen für die geradlinigen Dreiecke der neuen Geometrie vollständig abgeleitet waren. Am Schlusse wies er noch auf den Zusammenhang hin, der zwischen diesen Gleichungen und denen der sphärischen Trigonometrie besteht. Das Ganze setzte fast gar keine Vorkenntnisse voraus, war klar geschrieben und bot dem Verständniss durchaus keine Schwierigkeit.

Trotz alledem blieben die „Geometrischen Untersuchungen" genau ebenso unbeachtet, wie die „Géométrie imaginaire". Vermuthlich hörten überhaupt nur die wenigsten Mathematiker etwas von ihrem Erscheinen, und wer konnte ahnen, dass eben dieses dünne, unscheinbare Heftchen von 61 Kleinoktavseiten die Lösung des Parallelenräthsels enthielt, das seit Euklids Zeiten unzähligen Menschen Kopfzerbrechen verursacht hatte und das jahraus jahrein, aber immer vergebens, in so und so vielen Schriften bearbeitet wurde?

So schien es, dass Lobatschefskij die Anerkennung seiner geometrischen Entdeckungen, die seine Landsleute ihm versagten, auch ausserhalb Russlands nicht finden könne. Und doch gab es wenigstens einen Mathematiker, der seine Leistungen zu schätzen wusste, einen, dessen Urteil ihn über die Gleichgültigkeit und Verständnisslosigkeit aller andern trösten konnte und, wir dürfen es hoffen, auch getröstet hat. Dieser eine war Gauss.

Allem Anscheine nach war Gauss auf die „Geometrischen Untersuchungen" zuerst durch eine in Gersdorfs Repertorium der deutschen Literatur erschienene Anzeige aufmerksam geworden, die er selbst als „höchst albern" bezeichnet. Von einem gewissen Knorre — so schreibt er den Namen in einem 1841 an Encke gerichteten Briefe, dem ich diese Thatsachen entnehme — von diesem Knorre also hatte er dann „eine kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung" Lobatschefskijs bekommen, die ihn schon deshalb besonders anzog, weil er damals anfing, „das Russische mit einiger Fertigkeit zu lesen". Durch das Studium dieser beiden Arbeiten fasste er ein lebhaftes Interesse für den „scharfsinnigen russischen Mathematiker" und gab in verschiedenen Briefen an Encke, Gerling und Schumacher seiner hohen Meinung über Lobatschefskij unverhohlen Ausdruck. Da er

es jedoch grundsätzlich vermied, sich in seinen Veröffentlichungen über die Frage der Parallelentheorie auszusprechen, so hat er in seinen gedruckten Arbeiten den Namen Lobatschefskij niemals erwähnt, ebensowenig wie er jemals J. Bolyai genannt hat, dessen Appendix er doch auch seinerzeit mit wahrer Bewunderung gelesen hatte. Immerhin that er für Lobatschefskij wenigstens soviel, dass er 1842 dessen Wahl zum Korrespondenten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften veranlasste und die Uebersendung des Diploms mit einem eigenhändigen Briefe begleitete. Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass diese ganz unerwartete Anerkennung Lobatschefskij eine ganz besondere Freude und Genugthuung bereitet hat, zumal sie von einem Manne kam, den zu bewundern er schon in seiner Jugend gelernt hatte. Das an Gauss gerichtete, noch erhaltene Dankschreiben Lobatschefskijs stammt aus dem Juni 1843; es ist allerdings von der Hand eines Schreibers und von Lobatschefskij nur unterzeichnet. Der „unglückliche Brand der Stadt" trug die Schuld an der Verzögerung der Antwort, denn er hatte, wie es in dem Schreiben heisst, Lobatschefskijs Gesundheit und auch seine „persönlichen Angelegenheiten etwas zerstört" und ihn „ausserdem noch mit einer Menge besonderer Dienstgeschäfte überhäuft".

Es bleibt uns jetzt noch übrig anzugeben, was Lobatschefskij sonst noch während seines Rektorats, also bis zum Jahre 1846 veröffentlicht hat.

In erster Linie ist da zu nennen eine deutsch geschriebene Abhandlung „Ueber die Convergenz der unendlichen Reihen", die in Kasan 1841 als Beilage zu den von Ernst Knorr herausgegebenen „Meteorologischen Beobachtungen aus dem Lehrbezirk der Universität Kasan" erschienen ist. Ueber den Inhalt der Abhandlung werden wir später sprechen, hier nur einiges über die Vorgeschichte der ganzen Veröffentlichung, die von Lobatschefskijs vielseitigem wissenschaftlichen Interesse Zeugniss ablegt.

Schon im Jahre 1828 waren einige Zöglinge der Universität Kasan beauftragt worden, regelmässige meteorologische Beobachtungen anzustellen. Die Aufsicht über diese Beobachtungen, die im Kasaner Boten abgedruckt wurden, hatte zuerst der Professor der Physik Kupffer übernommen und dann, als Kupffer noch in demselben Jahre als Mitglied der Akademie nach Petersburg berufen worden war, Lobatschefskij. Das dauerte bis zum Anfange des Jahres 1833, wo Ernst Knorr die Professur der Physik und damit zugleich die Leitung der meteorologischen Beobachtungen übernahm.

Dass Lobatschefskij auch nach diesem Zeitpunkte immer noch

regen Antheil an der Sache nahm, zeigt eben jene Veröffentlichung aus dem Jahre 1841. Wir haben aber dafür noch einen andern Beweis. Es wird berichtet, dass er sich mit grossem Eifer an Beobachtungen über die Temperatur des Erdbodens betheiligte. Dazu wurde auf dem Hofe der Universität ein Brunnen angelegt, der bis zu einer Tiefe von 32 Metern reichte und in dem man gegen 20 Thermometer vertheilte. Die Zahl der gemachten Beobachtungen belief sich 1833 und 1834 jährlich auf mehr als 3000. Wegen des Auftretens grosser Mengen von Kohlensäure wurden die Beobachtungen 1835 aufgegeben, aber 1841 liess sie Lobatschefskij wieder beginnen und richtete dabei seine Aufmerksamkeit namentlich auf die Temperatur der vegetabilischen Bodenschicht; um diese Temperatur zu messen ersann er sogar ein Metallthermometer von eigner Konstruktion.

Der vorhin erwähnte Knorr ist für uns aus zwei Gründen von besonderm Interesse. Erstens ist er es wahrscheinlich gewesen, der Gauss jene „kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung" Lobatschefskijs verschafft hat. Zu vermuthen ist das deshalb, weil sich Knorr eben mit Lobatschefskijs geometrischen Untersuchungen eifrig beschäftigt hat und weil er gerade im Jahre 1840 im Auftrage der russischen Regierung neun Monate lang die Schweiz, Deutschland, England und Frankreich bereist hat, um physikalische Apparate zu kaufen; dagegen ist wohl kaum anzunehmen, dass der Astronom K. F. Knorre aus Dorpat, der von 1821 ab an der Steuermannsschule und später an der Sternwarte von Nikolájef gewirkt hat, Gaussens Bekanntschaft mit den Arbeiten Lobatschefskijs vermittelt haben sollte. Vermuthlich hat also Gauss irrthümlich Knorre statt Knorr geschrieben.

Zweitens ist aber Knorr auch deswegen interessant, weil er trotz jahrelangen Verkehrs mit Lobatschefskij und trotz aller Bewunderung für dessen Leistungen sich nicht zu der neuen Geometrie hat bekehren können. In Kijef, wohin er 1843 berufen worden war, hat er 1849 einen „Versuch einer Darstellung der Elemente der Geometrie" veröffentlicht, in dessen Vorrede er die „Geometrischen Untersuchungen" erwähnt und bemerkt: „es gehört in der That eine nicht gewöhnliche Freiheit des Geistes dazu, eine solche Untersuchung, bey welcher stets ein gewisses inneres Gefühl die Zulässigkeit der ursprünglichen Annahme [dass die Winkelsumme im Dreiecke kleiner ist als zwei Rechte] zurückweist, so durchzuführen, wie diess von Lobatschewsky geschehen ist." Aber er fügt hinzu: „Um so mehr muss ich bedauern nicht die Ansicht Lobatschewsky's theilen zu können, dass neben der euclidischen Geometrie noch eine andere, die von ihm sogenannte imaginäre

Geometrie, möglich sey, denn meiner Ansicht nach zeigt seine Arbeit nur, dass auf dem von ihm betretenen Wege der Beweis dessen was zu beweisen gefordert wird, nicht erlangt werden kann, aber nicht dass es keinen anderen Weg gebe, der zum Ziele führe.“ Sein Buch ist denn auch ein neuer, selbstverständlich verunglückter Versuch, die Euklidische Parallelentheorie zu retten.

Ausser der 1841 erschienenen Arbeit über unendliche Reihen haben wir hier noch drei Veröffentlichungen Lobatschefskijs zu erwähnen.

Im Jahre 1842 erschien im 24. Bande des Crelleschen Journals eine ganz kurze Arbeit von ihm unter dem Titel: „Sur la probabilité des résultats moyens, tirés des observations répétées“. Sie ist nichts weiter als eine grösstentheils wörtliche Uebersetzung eines Abschnitts aus dem 1838 herausgegebenen zwölften Kapitel seiner „Neuen Anfangsgründe“.

In demselben Jahre wurde Lobatschefskij zugleich mit Simonof von der Regierung nach Pensa geschickt, um dort die am 24. Juni (6. Juli) stattfindende totale Sonnenfinsterniss zu beobachten, woran sich die schon früher erwähnte Revision der Gymnasien des Gouvernements Pensa schloss. Zurückgekehrt veröffentlichte er in den Kasaner Gelehrten Schriften und im Journale des Ministeriums für Volksbildung einen ausführlichen Bericht über die Sonnenfinsterniss, der besonders deshalb merkwürdig ist, weil er darin seine Ansichten über die Entstehung der Sonnenkorona und über die verschiedenen Lichttheorieen auseinandersetzt.

Im Jahre 1845 erwarb Popóf, Lobatschefskijs Schüler und späterer Nachfolger auf dem Lehrstuhle der reinen Mathematik, den Doktorgrad mit einer Arbeit „Ueber die Integration der Differentialgleichungen der Hydrodynamik“. Dem Abdrucke dieser Arbeit hatte Lobatschefskij eine ausführliche Beurteilung hinzugefügt, in der er zugleich auch noch eigne Ergebnisse mittheilte. Später, als er zeitweilig den Posten eines Kurators des Kasaner Lehrbezirks zu versehen hatte, regte er an, es solle zukünftig überhaupt jeder Doktordissertation eine ausführliche gedruckte Beurteilung beigegeben werden; jedoch fand dieser Plan im Senate Widerstand und kam infolgedessen nicht zur Ausführung.

Kapitel IX.

Die letzten Lebensjahre. Lobatschefskij als Mensch und als Lehrer.

Wir brechen jetzt die Aufzählung der wissenschaftlichen Arbeiten Lobatschefskijs ab und wenden uns zur Betrachtung des letzten Jahrzehnts seines Lebens.

Mit dem Jahre 1841 waren fünfundzwanzig Jahre vergangen, seitdem Lobatschefskij zum Professor ernannt worden war. Von diesem Zeitpunkte ab gehörte er nach den in Russland gültigen Bestimmungen zu den pensionirten Professoren, doch war er mit dem Titel eines Honorarprofessors noch auf fünf Jahre in seiner Stellung belassen worden. Im Juli 1846 waren auch diese fünf Jahre zu Ende.

Obgleich nun Lobatschefskij im Jahre vorher noch einmal auf vier Jahre zum Rektor gewählt worden war, und obgleich der Senat an das Ministerium die dringende Bitte richtete, ihm nochmals fünf Jahre zuzugeben, „da es für den Senat eine grosse Ehre sein werde, einen so hervorragenden Gelehrten und so erfahrenen Professor unter seinen Mitgliedern zu haben“, so wurde trotzdem darauf keine Rücksicht genommen. Durch eine kaiserliche Entschliessung vom 28. August (9. September) 1846 wurde er von seinen Aemtern als Professor und Rektor entbunden und, da gerade um dieselbe Zeit Mussin-Puschkin nach Petersburg versetzt wurde, zum Stellvertreter des Kurators ernannt. Diesen Posten hat er bekleidet, bis er im November 1855 ganz in den Ruhestand versetzt wurde.

Als Vertreter des Kurators leitete er die Verwaltung der Universität bis zur Ankunft des neuen Kurators Molostwóf, die 1847 erfolgte. Aber merkwürdig: so lange er Rektor gewesen war, hatte zwischen ihm und dem Senate stets ungestörte Einigkeit geherrscht, in seiner neuen Stellung gerieth er sofort in Streitigkeiten mit dem Senate. Woran das lag, ist nicht ganz aufgeklärt, doch scheint es, dass Simonof, den man zu seinem Nachfolger im Rektorate gewählt hatte, die Schuld mit trug: wenigstens wird dieser als ein ziemlich eitler Mann geschildert, der schon lange nach dem Rektorposten lüstern gewesen war. Wie dem auch sei, Lobatschefskij sah seinen wohlverdienten und so lange behaupteten Einfluss zusehends schwinden. Nach der Ankunft des neuen Kurators zog er sich daher von den Geschäften fast ganz zurück und wirkte nur noch bei den Aufnahmeprüfungen und bei den andern Prüfungen mit.

Die Gemüthsbewegungen, die dieser jähe Wechsel seiner Stellung an seiner geliebten Universität in ihm hervorrief, beeinflussten auch sein körperliches Befinden ungünstig und verminderten seine Widerstandskraft. Die länger als zwei Jahrzehnte hindurch fortgesetzte übermässige Anspannung seiner Kräfte rächte sich jetzt: seine Gesundheit, die schon früher gelitten hatte, nahm mit Riesenschritten ab. Dazu kam schwerer Kummer in seiner Familie. Er hatte 1832 geheirathet, und seine Gattin hatte ihm drei Söhne und eine Tochter geschenkt. Den ältesten, 1833 geborenen dieser Söhne musste er Anfang der funfziger Jahre als hoffnungsvollen Studenten sterben sehen. Dies Alles brach seine Kraft, und in den letzten Jahren seines Lebens machte der eben erst sechzigjährige den Eindruck eines hinfälligen Greises.

Auch sein Augenlicht nahm immer mehr ab und ging zuletzt gänzlich verloren. Trotzdem fuhr er fort, die Universitätsversammlungen zu besuchen, die Doktordisputationen und akademischen Reden anzuhören. Noch ganz kurz vor seinem Tode stellte er sich persönlich in Uniform dem Minister für Volksbildung vor, der Kasan besuchte. Das war seine letzte Anstrengung im Dienste der Pflicht. Am 12. (24.) Februar 1856 starb er.

Wissenschaftlich thätig war Lobatschefskij auch noch in diesen letzten zehn Jahren seines Lebens. Eine im Jahre 1852 zugleich russisch und deutsch veröffentlichte Arbeit über bestimmte Integrale beweist das. Namentlich aber beschäftigte er sich immer wieder mit seiner imaginären Geometrie. Einmal — mehrere Jahre, nachdem er von seiner Professur entbunden worden war — hielt er vor einem auserlesenen Zuhörerkreise von Universitätsprofessoren und Gymnasiallehrern eine längere Reihe von Vorträgen über seine neuen Anfangsgründe der Geometrie, und als im Jahre 1855 das fünfzigjährige Jubiläum der Universität Kasan gefeiert werden sollte, da raffte er seine letzten Kräfte zusammen, um einen würdigen Beitrag zu der Sammlung wissenschaftlicher Abhandlungen zu spenden, die die Universität bei dieser Gelegenheit herauszugeben vorhatte. „Pangeometrie“ nannte er diesen Beitrag, in dem er nochmals eine ausführliche Darstellung seines geometrischen Systems gab, um zum Ausdrucke zu bringen, dass dieses System die gewöhnliche Euklidische Geometrie als besonderen Fall umfasse.

Die Pangeometrie, die sowohl in französischer als in russischer Sprache erschien, war Lobatschefskijs letzte wissenschaftliche Arbeit. Noch vor der Beendigung des Druckes erblindete er; es heisst sogar, er habe sie einigen seiner Schüler in die Feder diktirt.

Leider war es ihm nicht vergönnt bei Lebzeiten seine geometrischen Arbeiten in seinem Vaterlande anerkannt zu sehen. Noch 1853 erschien von dem Akademiker Bunjakofskij in Petersburg eine umfangreiche Arbeit über die Parallellinien, in der Lobatschefskij nicht einmal erwähnt ist! Auch unter seinen zahlreichen Schülern fand sich keiner, der diese Arbeiten fortgesetzt hätte. Die einzige Auszeichnung, die ihm von einer wissenschaftlichen Körperschaft seines Vaterlandes zu Theil geworden ist, kam von der Moskauer Universität: bei Gelegenheit ihres hundertjährigen Jubiläums ernannte ihn diese zu ihrem Ehrenmitgliede. Das Ausland blieb, von Gauss abgesehen, theilnamelos.

Lobatschefskij war mittleren Wuchses. Die Bilder, die man von ihm besitzt, zeigen ein ernstes, strenges Gesicht; auf einem Bilde, das aus seinen letzten Lebensjahren stammt und das unserm Buche beigegeben ist, sieht er fast mürrisch aus. Als ein ernster, finster blickender, unzugänglicher und wortkarger Mann lebte er auch in der Erinnerung derer, die nur den von Alter und Krankheit gebeugten Greis gesehen hatten. In seiner Jugend muss er lebhaft, ja feurig gewesen sein; eine aufreibende Thätigkeit im Dienste seiner Universität, schwere Erfahrungen, die auch ihm nicht erspart blieben, sie hatten ihn so verschlossen und wortkarg gemacht. Gleichwohl bewahrte er sich lebenslang ein warmes Herz, und wahrhaft väterlich war seine Liebe zur studirenden Jugend. Als Rektor hat er nicht wenige Studenten vor den Folgen jugendlicher Uebereilungen bewahrt und sich bei allen ein ehrfurchtsvolles Andenken gesichert. Namentlich aber war er stets bereit, begabte junge Leute auf alle Weise zu unterstützen und zu fördern. Man erzählt dafür verschiedene Beispiele. Einen Handlungsdiener Namens Bolzani fand Lobatschefskij hinter dem Ladentische damit beschäftigt, ein mathematisches Buch zu lesen. Er ermöglichte dem jungen Manne den Eintritt in das Gymnasium und dann den Besuch der Universität, und aus dem Handlungsdiener wurde später der Professor der Physik an der Universität Kasan. Eines armen Priesters Sohn war zu Fuss aus Sibirien nach Kasan gekommen, gänzlich mittellos; mit Lobatschefskijs Hülfe gelang es ihm in die medicinische Fakultät einzutreten. Nachdem er später als Arzt eine geachtete Stellung erworben hatte, vermachte er aus Dankbarkeit der Universität seine kostbare Büchersammlung.

Der hervorstechendste Zug in Lobatschefskijs Charakter war jedoch seine Gewissenhaftigkeit und sein unermüdlicher Pflichteifer. In einem dem Andenken seines Lehrers gewidmeten kurzen Aufsatze erzählt Popof, einer der Kollegen Lobatschefskijs habe sich über diesen

so ausgesprochen: „Es gab für ihn im Dienste und in der Wissenschaft nichts Untergeordnetes; was er auch angriff, Alles war in seinen Augen von der grössten Wichtigkeit, Alles that er mit ganzem Herzen und mit voller Ueberzeugung von dem Nutzen seiner Arbeit. Niemals entzog er sich seinen Verpflichtungen und in vielen Fällen nahm er freiwillig Arbeiten auf sich.“ Ich denke, denselben Eindruck wird man aus den von mir angeführten Thatsachen gewonnen haben.

Ueber Lobatschefskij als Lehrer sagt derselbe Popof Folgendes: „Im Hörsaale verstand es Lobatschefskij scharfsinnig oder hinreissend zu sein je nach dem Gegenstande seines Vortrags. Im Allgemeinen glich sein gesprochener Stil dem geschriebenen nicht. Während sich seine Abhandlungen durch einen knappen und nicht immer ganz klaren Stil auszeichneten, liess er es sich im Hörsaale angelegen sein, seine Auseinandersetzungen recht klar zu geben, indem er zunächst auf synthetischem Wege specielle Aufgaben löste und dann auf analytischem Wege die allgemeinen behandelte. Um den Mechanismus der Rechnung kümmerte er sich wenig, sondern vor allen Dingen um die Schärfe der Begriffe. Auf der Tafel schrieb er nicht schnell, vielmehr sorgfältig; Formeln schrieb er schön, damit die Phantasie des Zuhörers sich mit Vergnügen die Gegenstände des Unterrichts wieder vergegenwärtige. Er liebte es mehr, selbst zu lehren, als die Schriften andrer auszulegen, und überliess es daher seinen Zuhörern, sich mit der gelehrten Literatur bekannt zu machen. Seine öffentlichen Vorträge über Physik zogen ein zahlreiches Publikum in seinen Hörsaal, und die Vorlesungen für einen auserwählten Zuhörerkreis, in denen er seine neuen Anfangsgründe der Geometrie entwickelte, können mit Fug und Recht als äusserst scharfsinnig bezeichnet werden.“

Hören wir endlich noch, was Popof über Lobatschefskij als Examinator erzählt: „Bei den Prüfungen war er anscheinend eigensinnig: zuweilen begnügte er sich mit einer ganz kurzen Antwort, andre Male unterbrach er missvergnügt eine gewandte Antwort des Studenten. Das lag daran, dass er sein Augenmerk stets auf die Entwickelung der Fähigkeiten und des gesunden Verstandes richtete, während er den Besitz eines jugendlich guten Gedächtnisses nicht für dauerhaft hielt. Aber indem er von den jungen Leuten tadellose Schärfe des Ausdrucks forderte, erschien er unnöthig streng, denn der gelehrte Stil wird von den Doktoranden zu allerletzt erworben.“

Janischefskij, der selbst noch von Lobatschefskij geprüft worden war, erzählt ebenfalls, dass dieser ein strenger, ja peinlicher Examinator gewesen sei und dass er auf auswendig gelernte Antworten

wenig Werth gelegt, sondern hauptsächlich Schärfe des Ausdrucks verlangt habe. Bei den Prüfungen namentlich habe sich Lobatschefskijs ausgedehntes Wissen gezeigt: er konnte fast über jede Wissenschaft examiniren, und niemals verliess man die Prüfung ohne das Bewusstsein, etwas gelernt zu haben.

Aeusserlich verfloss das Leben Lobatschefskijs sehr ruhig und gleichmässig. Abgesehen von den früher erwähnten Dienstreisen hat er nur noch zwei grössere Reisen gemacht, das eine Mal war er vom September 1836 bis zum Januar 1837 in Petersburg und besuchte bei dieser Gelegenheit auch Dorpat, wo er vielleicht sogar seinen Lehrer Bartels, der 1836 am 7. (19.) December gestorben ist, noch einmal gesehen hat. Endlich vertrat er 1840 seine Universität in Helsingfors bei dem zweihundertjährigen Jubiläum der dortigen Hochschule. Die Gränzen Russlands hat er niemals verlassen.

Seine Erholung von der wissenschaftlichen Arbeit und von den Amtsgeschäften suchte er auf dem Lande. An der Wolga stromaufwärts, wenig mehr als sechzig Kilometer von Kasan, liegt ein Dörfchen „Bjelowólshskaja Slobódka“, das ihm gehörte. Hier legte er einen schönen Garten an, in dem sich noch heutigen Tages ein Cedernhain erhalten hat. Nach einer Ueberlieferung seiner Familie soll er beim Pflanzen dieser Cedern schwermüthig geäussert haben, die Früchte werde er wohl nicht mehr erleben, und wirklich: die ersten Cedernnüsse wurden in seinem Todesjahre gepflückt, aber erst nach seinem Tode.

Aber auch diese ländlichen Beschäftigungen trieb er nicht blos zu seiner Erholung und zu seinem Vergnügen, sondern auch dabei verfolgte er ernstere Ziele und war bemüht, sein bescheidenes Besitzthum zu einer Musterwirthschaft zu machen. Er legte eine Wassermühle an und erfand ein eigenes Verfahren zur Herstellung von Mühlsteinen. Er benutzte sogar Guano zum Düngen. Mit besonderm Erfolge betrieb er die Schafzucht: von dem Erlöse für den Brillantring, den ihm Kaiser Nikolaus geschenkt hatte, kaufte er eine Anzahl Merinoschafe und bei der Bearbeitung der Wolle führte er gewisse Verbesserungen ein, für die ihm die kaiserliche landwirthschaftliche Gesellschaft zu Moskau 1850 ihre silberne Medaille verlieh. Auch war er ein sehr eifriges Mitglied der 1839 gegründeten kaiserlichen Oekonomischen Gesellschaft zu Kasan und bekleidete darin lange Jahre das Amt eines Abtheilungsvorsitzenden.

Kapitel X.

Lobatschefskijs Schreibart. Nachträgliches über seine geometrischen Schriften. Seine Arbeiten auf dem Gebiete der Analysis.

Wir wenden uns jetzt wieder zur Betrachtung der Schriften Lobatschefskijs und wollen zunächst versuchen, uns von dem allgemeinen Eindrucke Rechenschaft zu geben, den diese machen.

Da müssen wir sagen, dass Lobatschefskijs Stil im Grossen und Ganzen nicht sehr flüssig ist, eher schwerfällig. Am wenigsten fühlbar ist das bei rein mathematischen Entwickelungen: seine Darstellung ist da zwar nirgends elegant, aber doch fast immer klar und verständlich; in einzelnen Schriften ist sie freilich zu knapp, zu abgerissen und stellt recht hohe Ansprüche an die Fähigkeit des Lesers, zwischen den Zeilen zu lesen, nur angedeutete Gedankengänge selbständig wiederherzustellen, unterdrückte Rechnungen zu ergänzen. Viel unangenehmer machen sich die Mängel seines Stils bei allgemeinen Auseinandersetzungen bemerklich, die das philosophische Gebiet streifen, wie zum Beispiel in der Einleitung zu den „Neuen Anfangsgründen". Da ist er nicht selten dunkel und wirklich schwer verständlich.

Sieht man von stilistischen Unebenheiten im Einzelnen ab, sondern achtet blos auf die Darstellung im Ganzen, also darauf, ob die Gedankenentwickelung gut geordnet vor sich geht und planmässig vom Leichtern zum Schwerern fortschreitet, so wird man nicht anstehen, die „Neuen Anfangsgründe" — wohlbemerkt mit Ausnahme der Einleitung — und die „Geometrischen Untersuchungen" als gut, ja sogar musterhaft geschrieben zu bezeichnen. Auch der „Pangeometrie" wird man bis zu einem gewissen Grade diese Anerkennung nicht vorenthalten können und die Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe" würde man mit den beiden zuerst genannten auf eine Stufe stellen müssen, wenn sie nicht gar zu aphoristisch abgefasst wäre, so dass sie ohne vorhergehendes Studium der „Neuen Anfangsgründe" nur äusserst schwer verständlich ist. Was dagegen die übrigen geometrischen Arbeiten, die „Imaginäre Geometrie" und die „Anwendung der imaginären Geometrie" anbetrifft, so wird man, ohne ungerecht zu sein, dem Urteile von Gauss beipflichten können, dass sie „mehr einem verworrenen Walde gleichen, durch den es, ohne alle Bäume erst einzeln kennen gelernt zu haben, schwer ist, einen Durchgang und Uebersicht zu finden". Die Arbeiten endlich, die rein analytischen

Inhalts sind, verrathen zwar in jeder Zeile den geübten, vor keiner noch so mühsamen Rechnung zurückscheuenden Mathematiker, aber sie sind gerade deshalb nicht leicht zu lesen, und man ist bei ihnen immer in Gefahr, den Faden zu verlieren.

Ueber den Inhalt und über die Bedeutung der geometrischen Arbeiten Lobatschefskijs ist früher schon das Nöthige gesagt, ausserdem kann man jetzt die beiden wichtigsten unter ihnen, die bisher ganz unzugänglich waren, die „Neuen Anfangsgründe“ und die Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe“ in deutscher Uebersetzung lesen. Da ferner in den Anmerkungen zu dieser Uebersetzung auch noch aus der „Imaginären Geometrie“, den „Geometrischen Untersuchungen“ und der „Pangeometrie“ alles einigermassen Wichtige mitgetheilt ist, was in den beiden übersetzten Abhandlungen nicht berührt wird und was zu deren Ergänzung dienen kann, so bleibt jetzt nur noch einiges wenige nachzutragen.

Schon in der Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe“ zeigt Lobatschefskij sehr deutlich das Bestreben, die Fruchtbarkeit seiner imaginären Geometrie für die Integralrechnung in ein möglichst helles Licht zu setzen. Er hat deshalb auch einen ganzen Abschnitt eingeschaltet, der sich blos mit der Betrachtung gewisser Integrale beschäftigt, auf die seine imaginäre Geometrie führt. In der Uebersetzung habe ich diesen Abschnitt weggelassen, weil er eigentlich ganz in das Gebiet der Integralrechnung gehört. Hier will ich nur erwähnen, dass Lobatschefskij darin unter anderm zwei Funktionen:

$$L(x, \omega) = \int_0^x \frac{x\,dx}{e^x + e^{-x} - 2\cos\omega}, \qquad \Phi(x) = -\int_0^x dx\,.\log\cos x$$

einführt, mit deren Hülfe sich viele in der imaginären Geometrie vorkommende Integrale ausdrücken lassen, namentlich die Inhalte von Pyramiden (vgl. S. 56 ff.). Insbesondre will ich noch auf eine Beziehung aufmerksam machen, die sich aus den Gleichungen (73) und (75) auf S. 56 f. sehr leicht ergiebt, nämlich auf diese:

$$\sin 2\omega\,.\,L(x, 2\omega) = \Phi(\omega + \xi) + \Phi(\omega - \xi) - 2\Phi(\omega),$$

wo ξ und x durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\cot\omega$$

verbunden sind, endlich auch auf die Reihenentwickelung:

$$\Phi(x) = x\log 2 - \frac{1}{2}\sum_1^\infty {}_\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu^2}\sin 2\nu x$$

und auf die daraus folgende Relation:

$$\Phi(\pi + x) = \Phi(x) + \pi \log 2.$$

In der 1835 erschienenen „Imaginären Geometrie“ tritt das vorhin gekennzeichnete Bestreben Lobatschefskijs noch viel deutlicher hervor. Man hat geradezu den Eindruck, als ob die neue Geometrie Nebensache und die Anwendung auf die Integralrechnung die Hauptsache wäre. Uebrigens sind die in der „Imaginären Geometrie“ gemachten Anwendungen auf die Integralrechnung zum grössten Theile auch schon in der frühern Arbeit behandelt.

Ganz und gar solchen Anwendungen gewidmet ist die 1836 erschienene „Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale“, doch enthält sie zugleich die Lösung verschiedener geometrischer Aufgaben. Zum Beispiel wird der Rauminhalt eines Kegels berechnet, dessen Grundfläche ein Kreis ist und dessen Erzeugende parallel sind zu einer Geraden, die auf der Ebene des Kreises, aber nicht im Kreismittelpunkte, senkrecht steht. Ferner wird mit grosser Ausführlichkeit die Berechnung des Rauminhalts von Pyramiden auseinandergesetzt. Diese Rauminhalte drückt Lobatschefskij mit Hülfe der Funktion $\Phi(x)$ aus, die aber jetzt mit $L(x)$ bezeichnet wird, und zwar bildet er sie aus den Werthen, die diese Funktion für gewisse Werthe ihres Arguments annimmt, durch Addition und Subtraktion. Die verschiedenen Wege, die man zur Berechnung eines solchen Rauminhalts einschlagen kann, liefern eine Menge linearer Gleichungen zwischen gewissen Werthen der Funktion $L(x)$.

Ausserdem entwickelt Lobatschefskij in der hier besprochenen Abhandlung noch eine lange Reihe von Relationen zwischen Integralen. Sein Verfahren besteht im Allgemeinen darin, dass er ein bekanntes, ausführbares Doppelintegral durch Einführung eines neuen Koordinatensystems umgestaltet und auf diese Weise zu neuen Integralen kommt, die auch in endlicher geschlossener Form dargestellt werden können. In einzelnen Fällen zeigt er dann noch, wie man rein analytisch, ohne die imaginäre Geometrie heranzuziehen, das eine Integral auf das andre zurückführen kann. Er sagt darüber einmal Folgendes:

„Ueberhaupt wollen wir bemerken, dass man zu allen Schlüssen, zu denen das Hülfsmittel der imaginären Geometrie führt, immer auch vermittelst der Analysis gelangen kann, indem man sich auf die zwischen den Veränderlichen bestehenden Gleichungen selbst stützt. Wenn ich im gegenwärtigen Falle der Kürze halber nicht gleich diesen Weg eingeschlagen habe, so dient das nebenbei als ein Beispiel dafür, welchen Vorzug das geometrische Verfahren nicht nur in Rück-

sicht auf die Einfachheit der Rechnung besitzt, sondern sogar durch die Unmittelbarkeit, mit der sich hier jede Abhängigkeit zwischen den Zahlen darbietet."

Auf Einzelheiten einzugehen ist hier nicht möglich, ist doch allein die Zusammenstellung der gefundenen Integralausdrücke, die er am Schlusse der Abhandlung giebt, so umfangreich, dass sie in der Sammlung seiner geometrischen Arbeiten sechzehn Quartseiten füllt!

Wir haben früher erwähnt, dass die beiden letzten Kapitel der „Neuen Anfangsgründe" mit der imaginären Geometrie nichts zu thun haben, sie sind deshalb auch in der Uebersetzung weggelassen. Es ist aber doch angebracht, auch über diese Kapitel XII und XIII noch etwas zu sagen.

In dem Kapitel XII behandelt Lobatschefskij mit grosser Sorgfalt die verschiedenen Fälle, die bei der Auflösung der geradlinigen Dreiecke der gewöhnlichen Geometrie zu unterscheiden sind. Er legt dabei ganz besondres Gewicht darauf, festzustellen, wie gross der Einfluss ist, den die Benutzung siebenstelliger Logarithmentafeln und die dadurch bedingte Vernachlässigung der höhern Decimalen auf das Endergebniss hat. In jedem einzelnen Falle entwickelt er die Formeln, aus denen sich beurteilen lässt, wie gross die Abweichung des Rechnungsergebnisses von dem wahren Werthe des gesuchten Stückes höchstens sein kann. Auch theilt er jedesmal vollständig durchgerechnete Zahlenbeispiele mit. Erwähnenswerth ist überdies, dass er gewisse Hülfsmittel angiebt, die zur Erreichung einer noch grösseren Genauigkeit der Rechnung dienen können.

Bei der Untersuchung über die Grösse der Abweichung des Resultats von der Wahrheit geht aber Lobatschefskij noch weiter. Er bemerkt, dass er bisher bei der Beurteilung dieser Grösse alle Umstände als ungünstig angenommen habe, während doch sehr oft im Laufe der Rechnung ein Fehler dem andern entgegengesetzt ist, so dass also einer den andern vermindern oder sogar ganz aufheben kann. Er stellt daher auch noch Betrachtungen darüber an, wie gross die Wahrscheinlichkeit des Auftretens jedes einzelnen Fehlers ist. Diese Betrachtungen hat er später im 24. Bande des Crelleschen Journals in französischer Sprache von Neuem veröffentlicht (vgl. S. 401).

Da ferner auch die gegebenen Stücke des Dreiecks nur durch Messungen gefunden sind, die mit Fehlern behaftet sind, so wird noch der Einfluss untersucht, den diese Fehler auf die übrigen Stücke haben. Endlich bespricht er gewisse Fälle, in denen man mit Vortheil von Reihenentwickelungen Gebrauch machen kann, um die fehlenden Stücke des Dreiecks zu ermitteln.

In Kapitel XIII wird die Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke genau in derselben Weise behandelt.

Von den geometrischen Schriften blieben jetzt nur noch die „Geometrischen Untersuchungen“ und die „Pangeometrie“ übrig; doch haben wir die „Untersuchungen“ schon früher zur Genüge gekennzeichnet, und über die Pangeometrie ist nicht viel zu sagen, da sie im Vergleich mit den ältern Schriften nur wenig wirklich Neues enthält. Höchstens könnten wir bemerken, dass in der „Pangeometrie“ an einigen Stellen Spuren vorhanden sind, die auf die geschwächte Sehkraft des Verfassers hinzudeuten scheinen. Einzelne Rechnungen sind so umständlich und so wenig übersichtlich durchgeführt, dass man fast glauben möchte, Lobatschefskij habe hier nur im Allgemeinen den einzuschlagenden Weg angegeben und die Ausführung der erforderlichen Rechnungen seinen Schülern überlassen. Doch gilt das nur von verhältnissmässig wenigen Stellen, und im Uebrigen zeigt sich der Verfasser der Pangeometrie noch im vollen Besitze seiner Geisteskräfte.

Lobatschefskijs rein analytische Untersuchungen hat man bisher gänzlich vernachlässigt, nur Wassiljef hat seit einigen Jahren bei verschiedenen Gelegenheiten darauf hingewiesen, dass auch sie durchaus nicht des Interesses entbehren, dass sie vielmehr Stellen aufweisen, an denen Lobatschefskij seiner Zeit vorauseilend Gedanken ausspricht, die heutzutage allerdings Gemeingut der Mathematiker sind, damals aber noch vollständig neu waren. Es würde sich wohl lohnen, diese Schriften einmal sorgfältig durchzuarbeiten, vielleicht würde man sogar Manches finden, was auch jetzt immer noch von Werthe ist. Leider sind sie zum grössten Theile russisch geschrieben und ausserhalb Russlands nur in äusserst wenigen Exemplaren vorhanden.

Hier muss ich mich selbstverständlich mit einigen kurzen Andeutungen über diese Schriften begnügen, doch will ich wenigstens ein paar Proben daraus mittheilen.

Lobatschefskijs Lehrbuch der Algebra, das ich leider nicht zu Gesicht bekommen habe, ist an erster Stelle zu nennen. Es behandelt in 17 Kapiteln die elementaren Rechnungsoperationen, die Brüche und Kettenbrüche, die Gleichungen ersten Grades, die unbestimmten Gleichungen, die reellen und komplexen Potenzen, die trigonometrischen Funktionen, die Differenzen und Summen von Funktionen, die Auflösung der binomischen Gleichungen und die Auflösung beliebiger algebraischer Gleichungen. Insbesondre enthält es auch schon ein

von Lobatschefskij ersonnenes Verfahren zur Untersuchung der Konvergenz unendlicher Reihen, auf das wir später zurückkommen werden.

Man sieht hieraus, dass sich der Verfasser für sein Lehrbuch ziemlich weite Gränzen gesteckt hatte. Aber auch sonst war dieses keine Arbeit nach der Schablone. Charakteristisch hierfür ist eine Stelle im Vorworte, wo es heisst: „In allen Zweigen der mathematischen Wissenschaften erwirbt man die ersten Begriffe leicht, aber immer mit Mängeln behaftet. Schliesslich muss man jedoch einmal wieder zu den Grundlagen zurückkehren, und dann ist es an der Zeit, auf vollkommene Strenge Gewicht zu legen.“ Nach seiner Ansicht „beginnt erst in der Algebra die Mathematik mit der ganzen Schärfe der Begriffe und mit der ganzen Weite des Gesichtskreises, während die Arithmetik blos den Anfang bildet und nur zur Vorbereitung und zur Uebung dient“. Er machte deshalb in seiner Algebra den Versuch, diese Wissenschaft ganz systematisch von den ersten Elementen an aufzubauen, und in der Einleitung zu den „Neuen Anfangsgründen“ (s. S. 81 f.) spricht er mit einem gewissen Selbstbewusstsein davon, dass er diesen Versuch jetzt auch bei der Geometrie durchführen wolle.

Nur im Vorbeigehen erwähnen wir die 1834 erschienene Arbeit über die Gleichungen von der Form: $x^n - 1 = 0$. Sie ist eine Fortsetzung seiner auf S. 359 erwähnten Jugendarbeit, die er, wie wir schon damals erzählt haben, später in sein Lehrbuch der Algebra aufgenommen hatte. Er behandelt nämlich jetzt den Fall $n = 8m + 1$ und zeigt, wie man die Gleichung m-ten Grades aufstellen kann, auf die sich die gegebene Gleichung durch Ausziehung von Quadratwurzeln zurückführen lässt. Etwas näher müssen wir dagegen auf die ebenfalls 1834 gedruckte Arbeit „Ueber die Konvergenz der trigonometrischen Reihen“ eingehen. Wir kümmern uns dabei um den Hauptgegenstand der Arbeit, die trigonometrischen Reihen, gar nicht und berichten davon nur soviel, dass Lobatschefskij die berühmte Arbeit Dirichlets aus dem vierten Bande des Crelleschen Journals (1829) anführt und meint, Dirichlet scheine „ohne die nöthige Vorsicht“ die unendliche Reihe:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi + \cdots$$

blos deshalb für konvergent erklärt zu haben, weil das Vorzeichen der Glieder wechselt, ein Tadel, dessen Berechtigung hier unerörtert bleiben muss. Wohl aber wollen wir die für jene Zeit wirklich merkwürdigen Betrachtungen mittheilen, die Lobatschefskij über den Funktions-

begriff und über den Differentialquotienten anstellt. Es heisst da auf S. 181 ff. in genauer Uebersetzung:

„Der allgemeine Begriff erfordert, dass man eine Zahl dann [181 als Funktion von x bezeichnet, wenn sie für jedes x gegeben wird und sich mit x stetig ändert. Der Werth der Funktion kann entweder durch einen analytischen Ausdruck gegeben sein oder durch eine Bedingung, die ein Mittel liefert, um alle Zahlen zu prüfen und eine davon auszuwählen; oder endlich kann die Abhängigkeit bestehen, aber unbekannt bleiben.

„Zum Beispiele ist x^3 eine Funktion von x, die analytisch ausgedrückt ist; aber die Wurzel einer Gleichung fünften Grades ist eine Funktion des letzten Gliedes, für die noch kein analytischer Ausdruck gefunden ist und die durch die Gleichung selbst als Bedingung bestimmt wird. Im strengen Sinne muss man sagen, dass weder von diesen noch von jenen Funktionen die Werthe unmittelbar gegeben sind, sondern dass sie stets durch Bedingungsgleichungen begränzt und deshalb grössten Theils nur näherungsweise berechnet werden. Zum Beispiele wird ja die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl, wenn sie nicht wieder ganz ist, durch einen unendlichen Bruch dargestellt, bei dem die Decimalstellen eine nach der andern durch Versuche ermittelt werden.

„Endlich können die Bedingungen, denen eine Funktion unterworfen ist, noch unbekannt sein, während schon zweifellos eine [182 Abhängigkeit zwischen Zahlen besteht. In diesem Falle muss die Annahme, die Funktion lasse sich analytisch ausdrücken, als willkürlich bezeichnet werden. Es ist wahr, dass man noch keine solchen Beispiele gefunden hat, bei denen es unmöglich ist, die Abhängigkeit zwischen den Zahlen unmittelbar oder mittelbar durch einen analytischen Ausdruck darzustellen; jedoch kann man auch nicht vollkommen sicher sein, dass nicht etwa eine andre Annahme zu einer andern Lösung führen könnte. In meiner Abhandlung über die Anfangsgründe der Geometrie (Kasaner Bote von 1830 [hier S. 1—66]) nahm ich den Winkel an als abhängig von dem Abstande zwischen seinem Scheitel und dem Punkte auf dem einen Schenkel, wo die Senkrechte dem andern Schenkel parallel wird, indem ich unter einer parallelen Linie eine solche verstand, die bei der kleinsten Veränderung ihrer Richtung nach der einen Seite hin zu schneiden beginnt. Es ist klar, dass hier der Begriff der Abhängigkeit in der Erklärung selbst enthalten ist, aber irgend einen analytischen Ausdruck zuzulassen, hiesse doch von vornherein die Allgemeinheit der Annahme einschränken. Indem ich daher den Abstand des Scheitels von der Senkrechten mit

x bezeichnete, nannte ich den Winkel selbst $F(x)$, wobei ich jedoch keineswegs unter diesem Zeichen irgend eine analytische Funktion von x verstand, sondern nur ausdrücken wollte, dass mit dem Abstande x jedesmal zugleich der Winkel $F(x)$ gegeben ist. In der Folge wird nunmehr bewiesen, dass $F(x)$ wirklich eine analytische Funktion ist und durch die Gleichung:

$$\cot \tfrac{1}{2} F(x) = e^x$$

bestimmt wird, wo e die Grundzahl der Neperschen Logarithmen ist. [183

„Anscheinend ist es unmöglich an der Wahrheit dessen zu zweifeln, dass Alles in der Welt durch Zahlen dargestellt werden kann, und ebensowenig an der Richtigkeit der Annahme, dass jede darin vorkommende Veränderung und Beziehung durch eine analytische Funktion ausgedrückt wird. Indessen lässt eine allgemeine Betrachtung der Theorie das Bestehen einer Abhängigkeit schon in dem Sinne zu, dass man die Zahlen, die mit einander verbunden sind, als gleichzeitig gegeben ansieht. Lagrange hat infolgedessen in seiner Funktionenrechnung (Calcul des fonctions), durch die er die Differentialrechnung ersetzen wollte, die Allgemeinheit des Begriffs um ebensoviel geschädigt, wie er an Strenge der Schlüsse zu gewinnen gedachte.

„Man muss daher unter dem Worte Funktion überhaupt eine Zahl verstehen, deren stetige Aenderungen gegeben sind und von den Aenderungen einer andern abhängen, wenn auch auf eine vollständig unbekannte Art. Wir bezeichnen mit $F(x)$ eine Funktion von x, die, sich mit x ändernd, unaufhörlich wächst von einem bestimmten x bis zu $x = a$. Wir theilen $a - x$ in i gleiche Theile und setzen: $a - x = i \,.\, h$. Die Zahlen in der Reihe

$$F(x),\ F(x+h),\ F(x+2h),\ \ldots,\ F(a)$$

seien immer bekannt, wie klein auch h sein möge, das mit wach- [184
sendem i unbegränzt abnimmt. Das Verhältniss:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

muss sich zugleich mit h ändern. Für $i' > i$ sei $a - x = i'.h'$. Wenn dann überdies:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \frac{F(x+h') - F(x)}{h'} = E$$

oder, was ganz dasselbe, wenn:

$$\frac{h' \,.\, F(x+h) - h \,.\, F(x+h') + (h-h')F(x)}{hh'} = E$$

für jedes x zugleich mit h stetig so weit abnimmt, dass es so klein

gemacht werden kann, wie man will, so soll die Funktion $F(x)$ **ununterbrochen** heissen, und es wird dadurch für das Verhältniss:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

eine Gränze bedingt, zu der man durch stetige Verkleinerung von h gelangt und die gleich $\frac{dF(x)}{dx}$ sein wird. Wenn sich dagegen E bei [185
der Verkleinerung von h irgend einer Zahl nähert, die grösser als Null ist, und diese nicht überschreiten kann, so zerfällt die Funktion $F(x)$ in zwei, die zusammen einen Punkt scharfen Knickes in der Krümmung der Linie darstellen, auf der die Spitzen der zur x-Axe senkrechten Ordinaten $F(x)$ liegen. Wenn dieser Knick in der Krümmung insbesondre in dem Punkte stattfindet, dessen Koordinaten x und $F(x)$ sind, so erhalten wir durch die Substitution $h' = -h$ den Ausdruck:

$$\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h},$$

der für eine ununterbrochene Funktion $F(x)$ mit h ohne Gränzen abnimmt, während er für unterbrochene Funktionen $F(x)$ und für gewisse x nicht unter eine bestimmte Gränze der Abnahme herabsinkt."

Lobatschefskij hatte also die Nothwendigkeit der Unterscheidung zwischen solchen Stellen, an denen eine Funktion blos stetig, und solchen, an denen sie auch differentiirbar ist, klar erkannt. Er sah jedenfalls die Unmöglichkeit ein, zu beweisen, dass aus der Stetigkeit einer Funktion deren Differentiirbarkeit folgt. Zwar spricht er es nicht aus, dass stetige Funktionen denkbar seien, die überhaupt nicht differentiirbar sind, und noch weniger kommt bei ihm ein Beispiel einer solchen Funktion vor; aber auch so ist die Bestimmtheit, mit der er die Unterscheidung als geradezu selbstverständlich hinstellt, ein starker Beweis für die Schärfe seines Denkens und für sein stetes Streben nach wirklicher Strenge.

Aus dem Jahre 1835 stammt wieder eine lange Abhandlung über unendliche Reihen. Ihr Titel lautet: „Ein Verfahren sich von der Konvergenz unendlicher Reihen zu überzeugen u. s. w.", gemeint ist damit das Verfahren, das Lobatschefskij schon in seiner Algebra angegeben hatte. Ich übersetze seine Darstellung des Verfahrens auf den Seiten 214—216 der Abhandlung:

„Die positive Zahl $f(i)$ möge irgend eine Funktion der ganzen [214
Zahl i darstellen und zugleich jedes Glied der unendlichen Reihe:

(1) $$S = \sum_1^\infty f(i),$$

die entsteht, wenn wir die Werthe von $f(i)$ addiren, indem wir an die Stelle von i der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3 und so weiter bis ins Unendliche setzen.

„Die Funktion $f(i)$ können wir wieder als den Werth einer unendlichen Reihe annehmen

(2) $$f(i) = \Sigma l \,.\, 2^{a-\lambda} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty, \end{cases}$$

die durch Entwickelung nach Potenzen von 2 entsteht, so dass hier a für alle Glieder konstant ist, λ entweder null oder eine ganze positive Zahl, $l = 1$ für $\lambda = 0$ und sodann für jedes andre λ entweder: $l = 0$ oder: $l = 1$. Setzen wir diesen Werth (2) der Funktion $f(i)$ in die Gleichung (1) ein, so müssen wir erhalten:

$$S = \Sigma L \,.\, 2^{a-\lambda} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty \end{cases}$$

mit ganzen positiven Zahlen L. Es sei jetzt μ eine solche ganze [215 Zahl, dass:

(3) $$f(\mu) \geqq 2^{a-\lambda} \quad f(\mu + 1) \leqq 2^{a-\lambda}.$$

Danach ist $L \leqq \mu$ und folglich:

(4) $$S < \Sigma \mu \,.\, 2^{a-\lambda} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty. \end{cases}$$

„Die Bedingungen (3) dienen zur Bestimmung der Gränze, über die μ nicht hinauskommt und die in die Gleichung (4) eingesetzt zugleich die Gränze für den Werth der Reihe selbst bestimmt, wenigstens jedesmal dann, wenn in dieser Form die Summation möglich ist. An Beispielen wird dieses Verfahren deutlicher zu ersehen sein.

„Es sei:

$$f(i) = \frac{1}{i^n},$$

wo die Zahl n für alle Glieder der Reihe konstant ist. Wir müssen nun setzen:

$$\mu^n < 2^{\lambda - a}$$

und folglich: [216

$$\mu < 2^{\frac{\lambda - a}{n}}.$$

Auf Grund der Ungleichheit (4) finden wir ferner:

$$S < \Sigma 2^{\left(1 - \frac{1}{n}\right)(a - \lambda)} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty \end{cases}$$

und hieraus für $n > 1$:

$$S < \frac{2^{a-\frac{1}{n}a}}{1-2^{\frac{1}{n}-1}},$$

so dass in diesem Falle die unendliche Reihe:

$$S = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{i^n}$$

immer konvergirt, wie klein auch die Differenz $n - 1$ sein mag."

Die übrigen Beispiele unterdrücke ich und bemerke nur noch, dass das ganze Verfahren Lobatschefskij eigenthümlich sein dürfte, wenigstens scheint es weder vor noch nach ihm von irgend jemandem angewendet worden zu sein.

Im weiteren Verlaufe der Arbeit kommt der Verfasser in seiner Ausdrucksweise noch einmal auf den Unterschied zwischen Stetigkeit und Differentiirbarkeit zurück. Auf S. 297 sagt er:

„Bei jeder analytischen Funktion, wie hier $f(x)$, muss man die Aufmerksamkeit auf die Stetigkeit und die Ununterbrochenheit lenken. In meiner Arbeit „Ueber die Konvergenz der trigonometrischen Reihen" habe ich die Nothwendigkeit dieser Unterscheidung bewiesen, wobei ich die Funktion $f(x)$ stetig nannte, wenn ihre Zuwachse zugleich mit den Zuwachsen der Veränderlichen x bis auf Null abnehmen, dagegen ununterbrochen, wenn das Verhältniss zweier solcher Zuwachse bei deren Verkleinerung unmerklich in eine neue Funktion übergeht, die infolgedessen der Differentialquotient sein wird. Integrale müssen stets so in Intervalle zerlegt werden, dass die Elemente unter jedem einzelnen Integralzeichen die Stetigkeit und Ununterbrochenheit bewahren."

Man sieht hieraus von Neuem, welche grosse Wichtigkeit Lobatschefskij der Sache beilegte.

Von dem übrigen Inhalte der Abhandlung wollen wir nur eine Stelle erwähnen, an der auch Lobatschefskij einem damals weit verbreiteten Irrthume unterlag. Auf S. 233 ff. behauptet er nämlich: Wenn $F(x)$ nur für $x = f(n)$ verschwindet, wo $f(n)$ für $n = 1, 2, 3 \ldots$ verschiedene Werthe liefert, so ist:

$$F(x) = A\left(1 - \frac{x}{f(1)}\right)\left(1 - \frac{x}{f(2)}\right)\cdots,$$

sobald auch die Konstante A diese Gleichung für irgend ein x erfüllt und sobald das Produkt aus unendlich vielen Faktoren sich einem bestimmten Werthe nähert, wenn ein Faktor nach dem andern zugefügt wird. Er scheint aber, wie wir sehen werden, die Unrichtigkeit dieser Behauptung später erkannt zu haben.

Die 1841 erschienene deutsch geschriebene Abhandlung „Ueber die Konvergenz der unendlichen Reihen“ ist deshalb von Interesse, weil Lobatschefskij sie benutzt hat, um gewisse Entwickelungen seines Lehrbuchs der Algebra noch einmal zu wiederholen. Er sagt ausdrücklich, dass er die Untersuchung der Konvergenz unendlicher Reihen, die Einführung der Exponentialfunktion, der Logarithmen, der trigonometrischen Funktionen und der allgemeinen Potenz hier ebenso dargestellt habe, wie in seinem Lehrbuche und dass er diese Dinge in das Lehrbuch deshalb aufgenommen habe, „um diesem Theile der Mathematik nicht den wesentlichen Nutzen zu rauben, welcher von den trigonometrischen Functionen und der Zerlegung in unendliche Reihen gezogen werden kann, und um den Berechnungen mit Hülfe imaginärer Grössen eine feste Grundlage zu geben“. Ebenso wiederholt er Einiges aus der Arbeit über die trigonometrischen Reihen. Aber auch Neues fügt er hinzu, und da ist besonders eine Stelle beachtenswerth. Er sagt nämlich: „Die Zerlegung der trigonometrischen und Exponential-Functionen kann bis jetzt in ihrer Demonstration nicht als vollkommen begründet angesehen werden.“ Darauf folgt dann ein allem Anscheine nach wirklich strenger Beweis dafür, dass die Funktion $\sin x$ in der That durch das bekannte unendliche Produkt dargestellt wird. Er scheint also damals den Irrthum, den er 1835 begangen hatte, durchschaut zu haben.

Von den drei bisher nicht besprochenen Abhandlungen Lobatschefskijs ist mir nur noch eine bekannt, die von 1852, über bestimmte Integrale. Er betrachtet darin unter anderm ein Integral von der Gestalt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin x \,.\, f(x),$$

wo $f(x)$ den Bedingungen:

$$f(-x) = f(x), \quad f(x+\pi) = f(x)$$

genügt, und bringt es auf die Form:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{(-1)^i \,.\, dx \,.\, \sin x}{i\pi + x} f(x),$$

woraus er schliesst, dass es den Werth:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \,.\, f(x)$$

besitzt. Ausserdem beschäftigt er sich zum Beispiele auch noch mit Untersuchungen über die Gammafunktion.

Kapitel XI.

Lobatschefskijs Werke vergessen. Späte Anerkennung seiner Leistungen. Gegenwart.

Als Lobatschefskij starb, war er weiter als jemals davon entfernt, seine geometrischen Entdeckungen anerkannt zu sehen. Ausserhalb Russlands waren diese so gut wie unbekannt: nur sehr wenige Eingeweihte wussten etwas davon, vermuthlich fast nur solche, die mittelbar oder unmittelbar durch Gauss von ihrem Vorhandensein unterrichtet waren; Gauss selbst war schon todt. In Russland kümmerte sich niemand darum, sogar in Kasan fand sich niemand, der in der von Lobatschefskij eingeschlagenen Richtung weiter gearbeitet hätte, keiner seiner Schüler trat für die Wahrheit ein, für die jener zwanzig Jahre lang gekämpft, die er in seinem wissenschaftlichen Testamente, der Pangeometrie, noch einmal seinen Zeitgenossen ans Herz gelegt hatte. Genau ebenso erging es den Untersuchungen seines grossen Nebenbuhlers J. Bolyai, auch sie schienen für die Welt verloren zu sein. Als ob die neue Geometrie niemals entdeckt worden wäre, kamen wie früher alljährlich neue Versuche zum Vorscheine, das Euklidische Parallelenaxiom zu beweisen. Freilich ist gerade das auch heutzutage noch nicht anders geworden.

Unter diesen Umständen war keine Möglichkeit vorhanden, dass die Arbeiten Lobatschefskijs und J. Bolyais auch nur den geringsten Einfluss auf die Entwickelung der Geometrie hätten ausüben können. Ganz unabhängig von ihnen entwickelte sich eine andre, noch allgemeinere Geometrie, die projektive Geometrie oder Geometrie der Lage, deren Anfänge zeitlich sogar vor den Untersuchungen Lobatschefskijs und Bolyais liegen und deren Geschichte an die Namen Poncelet, Möbius, Steiner, v. Staudt, Chasles geknüpft ist. Unabhängig von ihnen zeigte Riemann schon 1854 in seiner Habilitationsrede, die allerdings erst dreizehn Jahre später bekannt geworden ist, dass ausser der Euklidischen sogar zwei Geometrieen möglich sind, eine, die nichts andres ist als die Lobaschefskij-Bolyaische, und eine, die jetzt nach ihm benannt wird, in der die Gerade eine endliche Länge hat und die Winkelsumme im Dreiecke grösser ist als zwei Rechte. Endlich gab Cayley 1859, ohne von Lobatschefskij, J. Bolyai und Riemann etwas zu wissen, ein allgemeines Verfahren an, in die projektive Geometrie metrische Be-

ziehungen einzuführen: er ahnte damals noch nicht, dass seine projektive Massbestimmung geradezu das Wesen der nichteuklidischen Geometrie aufdeckte.

Da begann Anfang der sechziger Jahre der Briefwechsel zwischen cf. p. 454-5 Gauss und Schumacher zu erscheinen. Der zweite 1860 herausgekommene Band zeigte der überraschten Welt, dass auch Gauss und zwar schon sehr früh sich mit der Parallelentheorie beschäftigt und die Möglichkeit einer Nicht-Euklidischen Geometrie — so nannte er sie selbst — erkannt hatte. Im Jahre 1863 erschien dann der fünfte Band mit einem Briefe von 1846, in dem Gauss seinen Freund Schumacher auf Lobatschefskijs „Geometrische Untersuchungen" hinweist und sagt: „Sie wissen, dass ich schon seit 54 Jahren (seit 1792) dieselbe Ueberzeugung habe (mit einer gewissen späteren Erweiterung, deren ich hier nicht erwähnen will). Materiell für mich Neues habe ich also im Lobatschefsky'schen Werke nicht gefunden, aber die Entwickelung ist auf anderem Wege gemacht, als ich selbst eingeschlagen habe, und zwar von Lobatschefsky auf eine meisterhafte Art in ächt geometrischem Geiste. Ich glaube Sie auf das Buch aufmerksam machen zu müssen, welches Ihnen gewiss ganz exquisiten Genuss gewähren wird."

Nachdem so die Autorität von Gauss für die Berechtigung einer nichteuklidischen Geometrie und für die „Geometrischen Untersuchungen" Lobatschefskijs eingetreten war, konnte diese Geometrie nicht wieder von der Tagesordnung verschwinden, und zugleich war der Name Lobatschefskijs der Vergessenheit entrissen. Es kann nicht meine Aufgabe sein, die umfangreiche Literatur, die seitdem über die nichteuklidische Geometrie und über die Grundlagen der Geometrie entstanden ist, auch nur aufzuzählen, geschweige denn zu besprechen, ich nenne daher neben Riemann, dessen Rede ja erst 1867, nach seinem Tode, gedruckt worden ist, nur noch die Namen: Beltrami, Helmholtz, Felix Klein, Sophus Lie und verzichte darauf, auch nur anzudeuten, was diese Männer im Einzelnen für die nichteuklidische Geometrie geleistet haben; ausserdem darf ich in dieser Beziehung auf das zusammenfassende Werk Killings verweisen: „Einführung in die Grundlagen der Geometrie", das jetzt in zwei Bänden abgeschlossen vorliegt (1893 und 1898). Meine Aufgabe erblicke ich vielmehr jetzt darin, wenigstens in grossen Zügen zu schildern, was seitdem geschehen ist, um den Leistungen Lobatschefskijs zu der gebührenden Anerkennung zu verhelfen.

Allem Anscheine nach ist es Baltzer gewesen, der zuerst nachdrücklich und mit Erfolg für das Bekanntwerden der Untersuchungen

Lobatschefskijs gewirkt hat. In der 1867 erschienenen zweiten Auflage des zweiten Bandes seiner Elemente der Mathematik wies er auf die von Lobatschefskij und J. Bolyai entdeckte Geometrie hin. Vorher hatte er schon Houël brieflich darauf aufmerksam gemacht, und dieser nahm sich der Sache mit grossem Eifer an. Houël veröffentlichte 1866 und 1868 französische Uebersetzungen der „Geometrischen Untersuchungen“ und des Bolyaischen Appendix. Auf seine Veranlassung gab Battaglini 1867 und 1868 italienische Uebersetzungen der „Pangeometrie“ und des Appendix heraus. Namentlich aber wendete sich Houël schon 1867 nach Kasan und suchte dort das Andenken Lobatschefskijs der Vergessenheit zu entreissen. Und nicht vergebens. Im Oktober 1867 fasste die physiko-mathematische Fakultät der Universität Kasan den Beschluss, eine Sammlung der geometrischen Werke Lobatschefskijs herauszugeben. Es kamen zwar allerhand Hindernisse dazwischen, so dass der erste, die russisch geschriebenen Arbeiten enthaltende Band erst 1883 erschienen ist und der zweite mit den deutsch oder französisch geschriebenen erst 1886 — aber der Anstoss war gegeben, man war sich endlich wenigstens in Kasan bewusst geworden, dass man in Lobatschefskij einen Mathematiker besessen hatte, auf den man stolz sein konnte.

Nun war die Bahn gebrochen. Die Namen Lobatschefskij und Bolyai fingen an, allgemein bekannt zu werden; doch ist nicht zu leugnen, dass die Kenntniss ihrer Werke wenigstens in Deutschland heute noch auf einen verhältnissmässig engen Kreis von Mathematikern beschränkt ist. Bei J. Bolyai liegt das hauptsächlich an der nicht geringen geistigen Anstrengung, die das Studium seines Appendix erfordert, der überdies noch nicht einmal in deutscher Uebersetzung erschienen ist; bei Lobatschefskij liegt es mit daran, dass gerade seine wichtigsten Schriften bisher nur dem zugänglich waren, der des Russischen mächtig ist. Auch die Versuche, die Frischauf 1872 und 1876 in zwei kleinen Schriften gemacht hat, die Geometrie Bolyais und Lobatschefskijs für das mathematische Publikum zu bearbeiten, haben daran nicht viel ändern können. Dagegen sind die französischen Uebersetzungen, die Houël von den „Geometrischen Untersuchungen“ und dem „Appendix“ herausgegeben hat, und die englischen Uebersetzungen Halsteds, nach der Zahl ihrer Auflagen zu urteilen, ziemlich verbreitet.

Inzwischen nahte das Jahr 1893 heran und damit Lobatschefskijs hundertjähriger Geburtstag. Da zeigte sich doch, dass Lobatschefskij der mathematischen Welt jetzt mehr war, als ein bloser Name. Die Physiko-mathematische Gesellschaft an der Universität Kasan sah es

als eine Ehrenpflicht an, für eine würdige Feier des Tages zu sorgen; Dank ihren Bemühungen vereinigten sich die ersten Mathematiker der Gegenwart, um öffentlich zu einer Sammlung aufzufordern, von deren Ertrage man in Kasan ein doppeltes Denkmal für Lobatschefskij errichten wollte: eines in Erz, das vor der Universität Kasan stehend die Züge des grossen Mathematikers und einstigen Rektors den Nachkommen vor die Augen führen sollte, eines in Gestalt einer Stiftung, aus der von Zeit zu Zeit Preise für hervorragende Leistungen auf dem Gebiete der Mathematik verliehen werden sollten, auf dem Lobatschefskij so erfolgreich gearbeitet hatte. Von allen Seiten, aus allen Ländern liefen die Beiträge ein, und als man am 22. Oktober (3. November) 1893 in feierlicher Sitzung der Universität Kasan den hundertsten Geburtstag Lobatschefskijs festlich beging, wobei Wassiljef als Vorsitzender der Physiko-mathematischen Gesellschaft die Festrede hielt, da konnte dieser der Versammlung berichten, dass die Ausführung jenes Planes durch den über Erwarten günstigen Ausfall der Sammlung gesichert sei.

Eben die Kasaner Feier des hundertsten Geburtstages hat ausserordentlich dazu beigetragen, den Namen Lobatschefskijs in weiten Kreisen bekannt zu machen, namentlich in Russland selbst, wo man vielfach geradezu überrascht war, dass ein solcher Mann in seinem Vaterlande so lange hatte unbekannt bleiben können.

Seitdem ist nicht blos das eherne Denkmal Lobatschefskijs am 1. (13.) September 1896 enthüllt worden, sondern es hat auch am 22. Oktober (3. November) 1897 die Physiko-mathematische Gesellschaft zum ersten Male den Lobatschefskijpreis verliehen: unter neun Bewerbern hat Sophus Lie für die geometrischen Untersuchungen im dritten Bande seines Werkes über Transformationsgruppen den Preis davongetragen.

Nachweisungen

zu

Lobatschefskijs Leben und Schriften.

Die auf S. 237 eingeführten Abkürzungen werden hier wieder benutzt.

S. 349, Z. 3—5. Die Janischefskijsche Biographie hat den Titel: Историческая записка о жизни и дѣятельности Н. И. Лобачевскаго. Э. П. Янишевскаго (Istoritscheskaja sapiska o shisni i djejatjelnosti N. J. Lobatschefskawa. E. P. Janischefskawa). Kasan 1868, 59 SS. in 8⁰. Die Uebersetzung A. Potockis steht in dem Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni, und zwar in Bd. II, Rom 1869 auf S. 223—262 unter dem Titel: Notice historique sur la vie et les travaux de Nicolas Ivanovitch Lobatchefsky. Discours prononcé dans la séance solennelle de l'Université Impériale de Kazan, le 5./17. Novembre 1868. Die Nachrichten über Lobatschefskij, für die im Folgenden keine Quelle angegeben ist, sind fast durchweg dieser Biographie entnommen. Die betreffenden Stellen einzeln anzuführen, hätte keinen Zweck: ich verweise deshalb nur da auf Janischefskij, wo ich mich dessen Darstellung besonders eng angeschlossen habe; die Seitenzahlen beziehen sich dabei immer auf die Potockische Uebersetzung.

S. 349, Z. 5—8. Die Rede Wassiljefs ist am 22. Oktober (3. November) 1893 in Kasan gehalten und ebenda 1894 erschienen. Eine englische Uebersetzung hat G. B. Halsted 1894 in Austin, Texas veröffentlicht. Eine deutsche, durch Nachträge des Verfassers vermehrte Uebersetzung habe ich selbst im VII. Hefte der „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik" herausgegeben, das zugleich das Supplement zu dem Jahrgange 1895 der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" bildet, s. da S. 207—244. Ich citire im Folgenden diese Uebersetzung kurz: Wassiljef.

S. 350, Z. 9, 8 v. u. In Kasan besitzt man mehrere eigenhändige Briefe Lobatschefskijs, die dieser an den Kurator der Universität, Mussin-Puschkin (s. S. 384 ff.), gerichtet hat (Mittheilung von Dr. Sinzof in Kasan und von Wassiljef). Das auf S. 399 erwähnte Dankschreiben Lobatschefskijs befindet sich mit andern Dankschreiben derselben Art zu einem Bande vereinigt auf der Göttinger Universitätsbibliothek.

Zu Kapitel I.

S. 351, Z. 6 und 10—13. Mittheilungen Wassiljefs.

S. 351, Z. 11 v. u. — 352, Z. 6. Janischefskij S. 225 f.

S. 352, Z. 13 f. und Z. 18—20. Mittheilungen Wassiljefs.

S. 352 f. Diese Nachrichten über Bartels sind der kurzen Selbstbiographie entnommen, die dieser in der Vorrede zu seinen „Vorlesungen über höhere Analysis" mitgetheilt hat. Die Jahreszahl 1805, S. 352, Z. 4 v. u., verdanke ich Stäckel*), sie ist durch einen Brief von Gauss an Wolfgang Bolyai sicher gestellt. Am 2. September 1808 schreibt nämlich Gauss aus Göttingen: „Ein vieljähriger Freund von mir und mein erster Lehrer in der Mathematik, Bartels, der 9 Jahre in der Schweiz war nachher 1805—1807 in Braunschweig und jetzt Prof. der Mathematik in Kasan in Russland geworden ist, hat in jenen 2 Jahren jenes Werk [die Disquisitiones arithmeticae] auch fleissig studirt, und ist in die meisten Materien eingedrungen: vor kurzen habe ich den ersten Brief von ihm aus Kasan gehabt, worin er mir schreibt, dass auch unter seinen Zuhörern 2 sind die es mit Eifer studiren." S. den „Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai. Mit Unterstützung der ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von F. Schmidt und P. Stäckel". Leipzig bei Teubner, 1898, S. 94. Ich citire fortan kurz: Briefwechsel G.-B.

S. 353, Z. 14, 13 v. u. Die Briefe von Bartels an Gauss befinden sich in Göttingen im Gaussarchive. Die Briefe von Gauss sind anscheinend nicht erhalten, da Bartels nach der Angabe O. Struves (vgl. S. 429) seine Korrespondenz nicht aufzubewahren pflegte.

S. 354, Z. 6—8. Es sind das die „Vorlesungen über mathematische Analysis von Dr. J. M. C. Bartels. Herausgegeben von F. G. W. Struve. Dorpat 1837". In dem „Vorwort des Herausgebers", vom August 1837, heisst es, dass das Werk mit Ausnahme des Anhanges schon im Jahre 1833 im Druck vollendet war und damals in einzelnen Exemplaren an mehrere Lehranstalten im Reiche, an die Schüler von Bartels und an einige wenige Freunde vertheilt wurde**). Dem Buchhandel sollte das Werk erst nach gänzlicher Vollendung übergeben werden. Während seiner letzten Krankheit habe Bartels seinen Schwiegersohn Struve mit der Herausgabe beauftragt, dieser habe aber von Band II nur die erste Vorlesung vollendet vorgefunden und diese daher als Anhang beigegeben. Das Werk sollte ausser dem, was es jetzt darbietet, noch Differentialrechnung, Integralrechnung, analytische Mechanik und Wahrscheinlichkeitsrechnung umfassen. Stäckel.

S. 355, Z. 6 und Z. 14. Die Zeitangaben nach Mittheilungen Wassiljefs. Ueber die merkwürdige Persönlichkeit Bronners findet man Näheres in der Allgemeinen Deutschen Biographie.

S. 355, Z. 19 v. u. — 356, Z. 12. Mittheilungen Wassiljefs.

S. 356, Z. 13 — 357, Z. 17. Janischefskij, S. 227 f.

S. 357, Z. 14—16. Mittheilung Wassiljefs. Dieser hat auch aus den

*) Im Folgenden sind die Notizen, die von Stäckel herrühren, jedesmal am Schlusse mit dessen Namen bezeichnet.

**) Hierdurch erklärt sich das Vorhandensein einzelner Exemplare, die die Bezeichnung Bd. I und die Jahreszahl 1833 tragen.

„Kasaner Nachrichten“ ermittelt, dass Lobatschefskij am 15. (27.) September 1811 als Magister vereidigt worden ist.

S. 357, Z. 18 v. u. — 358, Z. 2. Janischefskij S. 228 f. Nach einer Mittheilung Wassiljefs hatten die „Kasaner Nachrichten“ im April 1811 zu erscheinen begonnen und zwar zunächst als Privatunternehmen.

S. 358, Z. 3—8, s. G. A. I, S. II f.

S. 359, Z. 5—8, s. G. A. I, S. II f. und VI, Wassiljef S. 209.

S. 359, Z. 9—18. Man erinnere sich dessen, was Gauss in einem Briefe an W. Bolyai über Bartels sagt, s. S. 424, Z. 11 ff. Hier bei dieser algebraisch-zahlentheoretischen Arbeit liegt der durch Bartels vermittelte Einfluss Gaussens auf Lobatschefskij klar zu Tage, und dieser Einfluss ist so stark gewesen, dass Lobatschefskij auch später noch die damals begonnenen Untersuchungen fortgesetzt hat, vgl. S. 412. Dagegen ist es als sicher zu betrachten, dass Gauss auf Lobatschefskijs spätere geometrische Untersuchungen keinen Einfluss ausgeübt hat, der irgendwie von Bedeutung wäre, vgl. S. 378—382.

S. 359, Z. 19 f. Mittheilung Wassiljefs.

S. 359, Z. 9—7 v. u. In Nr. 21, 6. Sept. 1811; nach den G. A. I, S. V die erste Stelle, an der man seinem Namen im Drucke begegnet. Von den Hülfsmitteln, mit denen diese astronomischen Beobachtungen angestellt werden mussten, kann man sich eine Vorstellung machen, wenn man liest, was Littrow noch vier Jahre später, am 21. November 1815, in einem Briefe schreibt, den er von Kasan aus an den Direktor der Ofener Sternwarte, Pasquich, richtete und in dem er die Berufung nach Ofen annehmen zu wollen erklärte. Die bemerkenswerthesten Stellen dieses Briefes sind abgedruckt in dem Aufsatze von A. Heller: „Die St. Gerardsberger Sternwarte zu Ofen“ im 2. Bande der „Literarischen Berichte aus Ungarn“, Buda-Pest 1878, und zwar schreibt Littrow da unter Anderm: „Was meine astronomische Lage hier betrifft, so schäme ich mich, sie Ihnen zu beschreiben. Nach einem fünfjährigen Betteln erhielt ich endlich ein hölzernes Gartenhaus von etwa 12 Schuh ins Gevierte und einen 16-zölligen Multiplicationskreis von Baumann nebst einer Secundenpendeluhr, die aber auch schlägt und die Monatstage zeigt. Da jenes Häuschen ganz und gar nichts taugte, so habe ich dies Instrument sammt der Uhr in einem meiner Zimmer, dessen Fenster ich dazu einrichten liess, aufgestellt und so die Breitenbeobachtungen gemacht, die ich Ihnen unten der Sonderbarkeit wegen beilege. Jenes Gartenhäuschen heisst übrigens die kaiserliche Universitäts-Sternwarte und ich wurde von oben aufgefordert, eine günstige Nachricht davon in das B[odesche] Jahrbuch einzurücken. Obschon es auf diese Art mit der practischen Astronomie aller meiner Bemühungen ungeachtet nicht fortwollte, so ging es doch auch schlecht genug mit der theoretischen, da unsere Bibliothek weder irgend die Memoiren einer Academie, noch sonst auch nur eines der neueren mathematischen Werke enthält und man jedes Blatt, was man hier lesen will, bezahlen muss, was bei der ungeheuern Entfernung und dem ungeregelten Zustande des russischen Buchhandels äusserst kostspielig ist.“ Er berichtet ferner, er habe sich einen $1\frac{1}{2}$-füssigen Dollond verschafft und an diesem den Kreis des Diaphragmas unbrauchbar gefunden, ein Kasaner „sogenannter“ Mechaniker habe den Kreis nicht verbessern können, weil er keine Drechselbank besass

und weil dieses einfache nöthige Instrument in der ganzen Stadt nicht zu finden war. „Und doch nennt man Kasan die dritte Stadt des Reiches.“ Ich verdanke die Kenntniss dieser Briefstellen Herrn Baumeister Franz Schmidt in Buda-Pest.

S. 359, Z. 6—2 v. u. Wassiljef S. 210.

Zu Kapitel II.

S. 360 f. Janischefskij S. 229—233.

S. 361, Z. 7—3 v. u. Die Zeitangaben nach Mittheilungen Wassiljefs.

S. 362, Z. 7—11. Nach den G. A. I, S. VII. Chomprés Uebersetzung der „Trigonometria piana e sferica“ Cagnolis war 1808 in zweiter Auflage in Paris erschienen.

S. 362, Z. 15—363, Z. 5. Wassiljef S. 239 f. Die erste öffentliche Mittheilung über dieses „Kollegienheft“ hat Wassiljef im September 1894 auf der Wiener Naturforscherversammlung gemacht, s. den Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung Bd. IV, für 1894—95, Berlin 1897, S. 88.

Zu Kapitel III.

S. 363, Z. 5—3 v. u. Genaueres über Magnizkijs ganzes Verfahren findet man bei Janischefskij S. 235—246, sowie in dem Buche: Изслѣдованія и статьи по русской литературѣ и просвѣщенію М. И. Сухомлинова (Untersuchungen und Arbeiten über die russische Literatur und Bildung, von M. J. Suchomlinof), Petersburg 1889 bei Suworin.

S. 364, Z. 14, 13 v. u. Es scheint nicht, dass nach dieser Zeit noch direkte Beziehungen zwischen Littrow und Lobatschefskij bestanden haben. Stäckel hat in Wien den handschriftlichen Nachlass Littrows eingesehen, der sich im Besitze einer Enkelin Littrows, der Frau Professor Ella Edlen v. Lang, geb. v. Littrow, befindet. In einer Art Tagebuch, das Littrow geführt hat, hat dieser bemerkt, dass er während seines Aufenthalts in Kasan (1810—1816) Lobatschefskij verschiedene Bücher geliehen habe, so Lehrbücher der Astronomie von Schubert und Laplace, die Geodäsie von Puissant, Schriften von Lessing und Diderot. In demselben Tagebuche hat Littrow auch den Inhalt der von ihm abgeschickten Briefe aufgezeichnet, doch kommen keine Briefe an Lobatschefskij vor, sondern nur solche an dessen Kollegen Simonof, die meist astronomische Dinge betreffen; einmal, im Jahre 1816, wird auch Lobatschefskij erwähnt und zwar als „Günstling“ Saltykofs, des Kurators der Universität. Stäckel.

S. 365, Z. 12 ff. Hauptsächlich nach Mittheilungen Wassiljefs, zum Theile auch nach Janischefskij S. 247. Wie ausgedehnt die Lehrthätigkeit Lobatschefskijs damals war, sieht man am deutlichsten aus dem auf ihn bezüglichen Theile des Programms über die Vorlesungen, die vom 17. August 1824 bis zum 28. Juni 1825 an der Kaiserlichen Universität Kasan gehalten werden sollten. Wassiljef theilt die Stelle des Programms vollständig mit (S. 228 der deutschen Uebersetzung), und ich kann mir nicht versagen, sie auch hier zu wiederholen:

„Nikolaj Lobatschefskij, Dekan der physiko-mathematischen Abtheilung, ordentlicher Professor der reinen Mathematik, kündigt an

a) Aus dem Gebiete der reinen Mathematik für die Studenten der ersten Abtheilung Folgendes: Ueber die Eigenschaften der ganzen Zahlen, über imaginäre Potenzen, über die Wurzeln der Gleichungen, Elemente der Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie nach eigenen Heften; für die Studenten der zweiten Abtheilung: Analytische Geometrie, Differenzenrechnung, Anfangsgründe der Differentialrechnung nach dem Lehrbuche von Lacroix; für die Studenten der dritten Abtheilung: Integral- und Variationsrechnung, Anwendung der Analysis auf Geometrie, die ersten beiden nach Lacroix, die letztere nach Monge.

b) Aus dem Gebiete der Physik für die Studenten der ersten Abtheilung: Grundlagen der Physik, die Untersuchungsmethoden in dieser Wissenschaft, über die anziehenden und die abstossenden Kräfte, die Anschauungen der Physiker über die Körper, die Ausdehnung der Körper durch die Wärme, über die Elasticität der Körper und über die Verdampfung der Flüssigkeiten. Für die Studenten der zweiten und dritten Abtheilung: Ueber Elektricität, Magnetismus, Licht und Wärme, wobei er in seinem Unterrichte das Werk Biots zu Grunde legt: Traité complet de Physique, zugleich mit Benutzung andrer Schriftsteller.

c) Aus dem Gebiete der Astronomie wird er den Studenten der dritten Abtheilung sphärische und theoretische Astronomie anbieten nach Anleitung der Werke von Delambre.“

Der Rede Wassiljefs entnehme ich noch, dass Lobatschefskij 1826—27 ausser den Vorlesungen über reine Mathematik noch Statik und Mechanik der festen und der flüssigen Körper nach Lagrange und Poisson vortrug, sowie mathematische Physik nach Fourier, Laplace, Poisson und Fresnel.

S. 366, Z. 4—8. Janischefskij S. 247 f.

S. 366, Z. 11—1 v. u. Ebenda S. 249—251.

S. 367, Z. 8—27. Ebenda S. 248.

Zu Kapitel IV.

S. 368, Z. 1—31. Wassiljef S. 220.

S. 370, Z. 19—10 v. u. Janischefskij S. 249.

Zu Kapitel V.

S. 371, Z. 19—14 v. u. Wassiljef S. 221.

Zu Kapitel VI.

Ueber die Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie vgl. man das von Stäckel und mir herausgegebene Buch: „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss“, Leipzig 1895, das ich wieder kurz mit: P.Th. bezeichne. Ergänzungen dazu enthält unsre Abhandlung: „Gauss, die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie“, Math. Ann. Bd. 49, S. 149 ff., 1897, in der auch alle mathematisch interessanten Stellen aus dem Briefwechsel zwischen Gauss und W. Bolyai (vgl. S. 424, Z. 18 ff.) zusammengestellt sind. Uebrigens hatte Stäckel diese Stellen schon vorher in den Göttinger Nachrichten, Jahrgang 1897, S. 1 ff. veröffentlicht.

S. 374, Z. 17—33. Vgl. P. Th. S. 215—235. Der im Texte an-

geführte Brief war an Taurinus gerichtet und steht vollständig P. Th. S. 249 f. Ein Bruchstück aus einem noch älteren Briefe an Gerling, vom Jahre 1819, findet man ebenda S. 246.

S. 374, Z. 8 v. u. — 375, Z. 3. Vgl. P. Th. S. 243—245. In einem an Gauss gerichteten Briefe vom 26. Februar 1844 erzählt Gerling, dass Schweikart seine Entdeckung schon in Charkof gemacht habe; dort war aber Schweikart von 1812—1816 gewesen, erst 1816 kam er nach Marburg. Stäckel.

S. 375, Z. 4 v. o. — 4 v. u. Vgl. P. Th. S. 246—283.

S. 375, Z. 3 v. u. — 376, Z. 13. Vgl. Math. Ann. Bd. 49, S. 149 ff. und den Briefwechsel G.-B.

S. 376, Z. 12 v. u. — 377, Z. 14 v. u. Vgl. P. Th. S. 31—136 und 137—208.

S. 378, Z. 4—6. Sehr deutlich zeigt das ein im Gaussarchive befindlicher Brief von Taurinus an Gauss, datirt Coeln a. Rh. den 29. Dec. 1829, es heisst darin: „Ich darf nun hinzufügen, dass ich das ganze Problem eigentlich schon von Anfang an gewissermassen durchschaut habe: denn sobald ich bemerkt hatte, dass die Annahme einer Winkelsumme von $> 180^0$, consequent verfolgt, auf eine sphärische Geometrie führt, war es mein erster Gedanke, dass dem entgegengesetzten Falle auch eine Bedeutung gegeben werden könne, und ich vermuthete sogleich, dass diese Hypothese mit der wechselseitigen Beziehung zwischen Kreis-Bogen und Logarithmen zusammenhängen müsste. Sie werden mir verzeihen, wenn ich dem Drange, mir so wichtig und interessant scheinende Wahrheiten, soweit ich sie mit Recht für mein Eigenthum halten zu dürfen glaubte, der Welt nicht vorzuenthalten, nicht widerstand. Der Erfolg bewies mir, dass Ihre Autorität dazu gehört, ihnen Anerkennung zu verschaffen, . . .“. Taurinus denkt hierbei an seine 1826 erschienenen: Geometriae prima Elementa. Stäckel.

S. 378, Z. 10—13. In seinem kleinen Buche: „Kurzer Grundriss eines Versuchs u. s. w.“ Marós-Vasárhely 1851 spricht W. Bolyai mit hoher Anerkennung von den 1840 erschienenen „Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien“, wohl der einzigen Schrift Lobatschefskijs, die er und sein Sohn Johann kennen gelernt haben. In Johanns deutschen Aufzeichnungen finden sich ebenfalls, wie Stäckel bemerkt hat, verschiedene Hinweise auf Lobatschefskij, namentlich aber enthält der magyarisch geschriebene Theil von J. Bolyais handschriftlichem Nachlasse eine sehr umfangreiche Kritik der „Geometrischen Untersuchungen“ und ausführliche Auseinandersetzungen über deren Verhältniss zum „Appendix“. (Nach Mittheilungen von Suták in Buda-Pest, die ich dem Baumeister F. Schmidt verdanke.)

S. 378, Z. 14—19. Die Vermuthung, dass Gauss durch Bartels die geometrischen Untersuchungen Lobatschefskijs angeregt haben könnte; ist bei verschiedenen Gelegenheiten ausgesprochen worden, so in den Vorreden zu den G. A., I, S. I f. und II, S. 4, ferner auch von Wassiljef S. 211 f. Besonders F. Klein ist mit grossem Nachdrucke für diese Vermuthung eingetreten, die er als ihm überkommene „Göttinger Tradition“ bezeichnet, s. dessen „Nichteuklidische Geometrie I“, autographirte Vorlesung, gehalten 1889—90, 1. Abdruck, Göttingen 1892, S. 175 f., 2. Abdruck von 1893, S. 174 f. Jedenfalls findet sich aber in Gaussens Briefen nirgends

ein Anhalt für diese Tradition, an keiner Stelle dieser Briefe findet sich auch nur die leiseste Andeutung, dass Gauss die Entdeckungen Lobatschefskijs und J. Bolyais auf eine mittelbar oder unmittelbar von ihm ausgehende Anregung zurückführte, im Gegentheile zeigen die Briefe (vgl. S. 432 f. und Math. Ann. 49, S. 162, Briefwechsel G.-B. S. 109), dass Gauss die Selbständigkeit beider durchaus anerkannte, genau so wie die Schweikarts, dessen Unabhängigkeit von Gauss keinem Zweifel unterliegt. Mit Stäckel bin ich darin einig, dass gerade dieser Umstand für die Beurteilung der ganzen Frage sehr ins Gewicht fällt.

S. 378, Z. 9 v. u. Diesen Ausdruck braucht schon Gauss in seinem Briefe an W. Bolyai vom 25. November 1804: „Du willst aber nicht mein leeres Lob, das auch gewissermaassen schon darum partheiisch scheinen könnte, weil dein Ideengang sehr viel mit dem meinigen Aehnliches hat, worauf ich ehemals die Lösung dieses Gordischen Knotens versuchte und vergebens bisher versuchte.“ Math. Ann. Bd. 49, S. 159, Briefwechsel G.-B. S. 81.

S. 379, Z. 10—19 und 18—11 v. u., s. Math. Ann. Bd. 49, S. 157, 159, Briefwechsel G.-B. S. 36 f., 81.

S. 379, Z. 4 v. u. — 380, Z. 5. Dieses Tagebuch befand sich bis vor Kurzem in dem Besitze der Frau Professor Peters in Königsberg i. Pr., es ist aber von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen erworben und dem Gaussarchive überwiesen worden.

Schumacher war im Winter 1808—1809 in Göttingen.

S. 380, Z. 17—5 v. u. Diese Briefe sind ebenfalls im Besitze des Gaussarchivs.

S. 380, Z. 4—2 v. u. Neben Kästner ist hier auch Pfaff in Helmstedt zu nennen. In einem Briefe an W. Bolyai vom 31. Oktober 1851 sagt Gerling, ein Lieblingsschüler von Gauss und später dessen vertrauter Freund: „Meine früheren Beschäftigungen mit der Parallelentheorie erwähne ich nicht, denn schon im Jahre 1810—1812 hatte ich bei Gauss, sowie früher 1809 bei J. F. Pfaff einsehen gelernt, wie alle bisherigen Versuche das Euklidische Axiom zu beweisen misslungen waren.“ Dieses und andre Bruchstücke aus dem Gerlingschen Briefe sind schon P. Th. S. 244 abgedruckt (vergl. auch P. Th. S. 215, Z. 9—12). Stäckel.

S. 381, Z. 19—30. Der Brief O. Struves, dem ich diese Mittheilungen entnehme, ist datirt: Karlsruhe, 1896, Jan. 31.

S. 383, Z. 14—12 v. u. Riemann hat seine berühmte Abhandlung: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ am 10. Juni 1854 als Habilitationsrede vor der Göttinger philosophischen Fakultät vorgetragen, und Gauss befand sich dabei unter den Zuhörern.

Man darf mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, dass Gauss die nichteuklidische Geometrie, bei der die Winkelsumme des Dreiecks grösser ist als zwei Rechte, gemeint hat, als er 1846 in einem Briefe an Schumacher von „einer gewissen späteren Erweiterung“ schrieb; s. den Briefwechsel Gauss-Schumacher Bd. 5, S. 246 und P. Th. S. 235. Dagegen sagt er in einer Besprechung aus dem Jahre 1816 (P. Th. S. 223), dass „die Unmöglichkeit dieses Falles [wo ein Viereck mit drei rechten Winkeln einen vierten stumpfen Winkel hat] in aller Strenge bewiesen werden kann“. Vgl. auch Math. Ann. Bd. 49, S. 152.

Zu Kapitel VII.

S. 384, Z. 4—28. Janischefskij S. 252 f.

S. 384, Z. 6 v. u. — 385, Z. 23. Ebenda S. 254 f., 259 Anm.

S. 385, Z. 15 v. u. — 386, Z. 9. Ebenda S. 251 f.

S. 386, Z. 10 v. o. — 8 v. u. Ebenda S. 255 f.

S. 386, Z. 7 v. u. — 387, Z. 2 v. u. Ebenda S. 253 f., 240, Z. 1—8, 258, Z. 7—20.

S. 388, Z. 6—10. Die eigentliche Eröffnung der Universität hatte am 14. (26.) Februar 1805 stattgefunden, nachdem Kaiser Alexander I. die Bestätigungsurkunde am 5. (17.) November 1804 unterzeichnet hatte. Jetzt wird dieser letztere Tag gefeiert.

S. 388, Z. 15—19. Wassiljef S. 221—223. Da diese Proben zur Charakteristik Lobatschefskijs als Menschen beitragen, wiederhole ich sie hier.

Die Rede Lobatschefskijs beginnt mit einem Hinweise auf die Bedeutung der Erziehung:

„Ich stelle mir vor, in welchem Zustande sich ein Mensch befinden muss, der der menschlichen Gesellschaft entfremdet ganz dem Ermessen der wilden Natur überlassen ist. Sodann richte ich meine Gedanken auf einen Menschen, der inmitten der wohlgeordneten, gebildeten Bürgerschaft des letzten aufgeklärten Jahrhunderts durch tiefe Kenntnisse seinem Vaterlande zur Ehre und zum Ruhme gereicht. Welch ein Unterschied! Welcher unermessliche Abstand trennt den einen vom andern. Hervorgebracht hat diesen Unterschied die Erziehung. Sie beginnt von der Wiege an; zuerst wird sie durch die blose Nachahmung erworben, allmählich entwickeln sich Verstand, Gedächtniss, Einbildungskraft, Geschmack für das Schöne, es erwacht die Liebe zu sich selbst und zum Nächsten, die Liebe zum Ruhme, der Sinn für die Ehre, der Wunsch das Leben zu geniessen. Alle Fähigkeiten des Verstandes, alle Gaben, alle Leidenschaften, Alles das verwerthet die Erziehung und stellt es in den Dienst eines wohlgeordneten Ganzen, und der Mensch, als wäre er von Neuem geboren, zeigt sich als das Geschöpf in seiner Vollkommenheit.“ Aber die Erziehung darf die Leidenschaften des Menschen und die ihm angeborenen Begierden nicht unterdrücken und ausrotten: „Alles das muss bei ihm erhalten bleiben: sonst würden wir seine Natur verderben, ihr Gewalt anthun und sein Glück schädigen.“ „Es ist nichts gewöhnlicher, als über die Leidenschaften Klagen zu hören, aber wie richtig hat Mably*) gesagt: je stärker die Leidenschaften, um so nützlicher sind sie für die Gesellschaft; schädlich werden kann nur ihre Richtung.“

„Aber die blose Verstandesbildung ist noch nicht der Abschluss der Erziehung. Während der Mensch seinen Verstand mit Kenntnissen bereichert, muss er auch noch verstehen lernen, das Leben zu geniessen. Ich meine damit die Bildung des Geschmacks. Leben heisst: empfinden — das Leben geniessen: unaufhörlich etwas Neues empfinden, was uns daran erinnert, dass wir leben. ... Nichts hemmt den Strom des Lebens so sehr

*) [Gabriel Bonnot de Mably (1709—1785), französischer Philosoph, ein älterer Bruder Condillacs.]

wie die Unwissenheit; wie ein verödeter, geradliniger Weg begleitet sie das Leben von der Wiege bis zum Grabe. In den niedern Klassen erquicken noch die anstrengenden Arbeiten für des Lebens Nothdurft abwechselnd mit der Erholung den Geist des Landmanns, des Handwerkers. Ihr aber, deren Dasein ein ungerechtes Schicksal andern als eine schwere Last auferlegt hat, ihr, deren Geist abgestumpft, deren Gefühl erstickt ist, ihr geniesst das Leben nicht. Für euch ist die Natur todt, die Schönheiten der Poesie sind euch fremd, die Baukunst ihrer Reize und ihrer Herrlichkeiten entblöst, die Weltgeschichte gleichgültig. Ich tröste mich mit dem Gedanken, dass aus unsrer Universität derartige Erzeugnisse vegetabilischer Natur nicht hervorgehen werden; sie werden nicht einmal hierher kommen, wenn sie unglücklicherweise zu einem solchen Schicksale geboren sind. Sie werden nicht herkommen, wiederhole ich, denn hier weilt die Liebe zum Ruhme, das Gefühl für Ehre und inneres Verdienst."

„Die Natur, die den Menschen bei seiner Geburt so freigebig beschenkt hat, scheint noch nicht zufrieden gewesen zu sein und so hat sie einem jeden den Wunsch eingeflösst, die andern zu übertreffen, bekannt zu sein, ein Gegenstand der Bewunderung zu sein, berühmt zu werden, und auf diese Art hat sie dem Menschen die Pflicht auferlegt, selbst für seine Vervollkommnung zu sorgen. In unaufhörlicher Thätigkeit strebt der Geist, Ehrenbezeugungen zu erringen, sich emporzuheben und das ganze Menschengeschlecht schreitet von Vervollkommnung zu Vervollkommnung — und wo ist ein Ende abzusehen?"

„Wir wollen das Leben hochschätzen, solange es seine Würde nicht verliert. Mögen Vorbilder in der Geschichte, ein rechter Begriff von der Ehre, Liebe zum Vaterlande, die in jungen Jahren erweckt ist, bei Zeiten den Leidenschaften die edle Richtung und die Kraft geben, die uns erlauben, über die Schrecken des Todes zu siegen."

Indem er sich jetzt zur Moral als dem wichtigsten Gegenstande der Erziehung wendet, verweilt Lobatschefskij besonders bei der Liebe zum Nächsten: „Duclos*), Rochefoucauld, Knigge haben erklärt, auf welche Weise die Selbstliebe die versteckte Triebfeder aller Handlungen der Menschen in der Gesellschaft zu sein pflegt. Wer, frage ich, hat vollständig darzulegen verstanden, welche Pflichten aus der Liebe zum Nächsten entspringen?"

Dies die von Wassiljef mitgetheilten Proben.

S. 388, Z. 7 v. u. Brief von Gauss an Gerling vom 8. Februar 1844: „er scheint rector perpetuus der Universität zu sein". Vgl. S. 434, Z. 7.

S. 389, Z. 8 — 390, Z. 16. Janischefskij S. 256 f.

S. 390, Z. 17 v. o. — 5 v. u. Ebenda S. 258 f. Wassiljef S. 230. Der Tag des Brandes war der 24. August (5. September).

S. 391, Z. 3—7. Mittheilung Wassiljefs.

S. 391, Z. 16—18. Nach Wassiljef S. 229 Anm. las Lobatschefskij im Jahre 1833—34 mit Benutzung der Werke von Cousin, Lagrange und Lacroix für die Studenten des zweiten Kurses: Integration der Funktionen, für die des dritten Kurses: Integration der Differentialgleichungen mit einer Veränderlichen, und für die des vierten Kurses: Inte-

*) [Charles Pineau Duclos, 1704—1772, französischer Schriftsteller.]

gration der partiellen Differentialgleichungen und Variationsrechnung; diese Kurse behielt er bis zum Ende seiner Professorenthätigkeit bei.

S. 391, Z. 20—25. Wassiljef S. 229.

S. 391, Z. 9 v. u. — 392, Z. 9. Nach Mittheilungen Wassiljefs.

Zu Kapitel VIII.

S. 394, Z. 3—16. Vgl. hierzu S. 256, Z. 3—36.

S. 395, Z. 3—5. Einige Stellen aus der Vorrede bei Wassiljef S. 231.

S. 396, Z. 18—7 v. u. Man findet die Aeusserungen über jene Recension in den K. G. S. von 1835, Heft I, S. 5 und 78 f., in den G. A. I, S. 72 und 114.

S. 397, Z. 20—17 v. u. In der russisch geschriebenen „Imaginären Geometrie" von 1835 spricht Lobatschefskij von einer Abhandlung mit dem Titel „Géométrie imaginaire", die er nach Berlin an Herrn Crelle zur Aufnahme ins Journal geschickt habe, das kann keine andre als die 1837 erschienene sein; s. K. G. S. 1835, I, S. 87 und G. A. I, S. 119.

S. 397, Z. 5 v. u. Schon die „Neuen Anfangsgründe" mochten wenigstens bis zu einem gewissen Grade einem solchen Gefühle ihre Entstehung verdanken, vgl. S. 68, Z. 1—10.

S. 398, Z. 13—1 v. u. Der im Gaussarchive befindliche Brief an Encke ist datirt: Göttingen, 1. Februar 1841. Die ganze Stelle lautet im Zusammenhange:

„Ich fange an das Russische mit einiger Fertigkeit zu lesen, und finde dabei viel Vergnügen. H. Knorre hat mir eine kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung von Lobatschefski (in Kasan) geschickt und dadurch so wie durch eine kleine Schrift über Parallellinien in deutscher Sprache (wovon eine höchst alberne Anzeige in Gersdorfs Repertorium steht) bin ich recht begierig geworden mehr von diesem scharfsinnigen Mathematiker zu lesen. Wie mir Knorre sagte, enthalten die (in russischer Sprache geschriebenen) Abhandlungen der Universität Kasan eine Menge Aufsätze von ihm."

Ich füge hierzu zwei Bruchstücke aus Briefen von Gauss an Gerling. Der eine, von Stäckel entdeckte, in den Göttinger Nachrichten von 1896, S. 2—3 veröffentlichte Brief ist datirt Göttingen den 4. Februar 1844. Auf eine Anfrage von Gerling theilt Gauss darin zunächst die ausführlichen Titel des Tentamens von W. Bolyai und des Appendix von J. Bolyai mit und fährt dann fort:

„Uebrigens hat in den letzten Decennien ein Russe (Lobatschefski, Staatsrath u. Prof. in Kasan) einen ähnlichen Weg eingeschlagen. Er nennt die Nicht-Euklidische die imaginäre Geometrie (wie Ihr ehemaliger Kollege*) Astralgeometrie) und hat darüber in russischer Sprache viele sehr ausgedehnte Abhandlungen gegeben (meistens in den Записки казанскаго университета, Memoiren der Kasanschen Universität zum Theil auch in besondern Brochurn die ich, glaube ich alle besitze, aber ihre genauere Lectüre noch verschoben habe, bis ich mich einmahl mit Musse wieder in das Fach werfen kann, und das Lesen russischer Bücher mir

---

*) Der Name ist nicht ausgefüllt, gemeint ist Schweikart.

noch geläufiger ist als jetzt. Irre ich nicht, so ist auch ein Aufsatz des p. Lobatschefsky, vielleicht eine Uebersetzung aus den Записки in Crelles Journal, was ich aber in diesem Augenblicke nicht nachsehen kann.“

Der zweite Brief gehört zu der grossen Sammlung Gaussischer Briefe an Gerling, die im Gaussarchive enthalten ist, er ist eine Fortsetzung des ersten, stammt vom 8. Februar 1844, und es heisst darin:

„Lobatschefskis Aufsatz in Crelles Journal steht Band 17 pag. 295 ff. Ich finde, dass derselbe nur eine freie Uebersetzung des russischen Aufsatzes im Jahrgang 1835 der Gelehrten Schriften der Kasanschen Universität ist*), wo man eben da auch anstossen wird, wo dies in dem deutschen**) Aufsatze der Fall ist. In diesem stossen Sie an S. 296 Zeile 10 bei den Worten J'ai démontré etc. womit dem Leser der weiter nichts hat wie diesen Aufsatz wenig gedient ist. Eben so S. 303 oben J'ai prouvé ailleurs etc., wozu man dieselbe Bemerkung machen muss. Der frühere Aufsatz worauf sich dies zu beziehen scheint, wird wohl derselbe sein, der in einer Note des erwähnten Russischen Aufsatzes angeführt wird als***) stehend im Казанскомъ вѣстникѣ (Kasanschen Boten) für 1828 und 1829. Zugleich wird dabei bemerkt, dass eine sehr kränkende Kritik dieser Abhandlung in N 41 eines andern russischen Journals†) Сынъ отечества, Sohn des Vaterlandes von 1834 stehe, wogegen Lobatschefski eine Antikritik eingeschickt hat, die aber bis Anfang 1835 nicht aufgenommen sei.

„Mit diesen literarischen Notizen ist uns nur freilich auch wenig geholfen, da in Deutschland schwerlich ein Exemplar des Kasanschen Boten von 1828, 1829 zu finden sein möchte. Dagegen aber kann ich Ihnen den Titel einer andern Schrift nachweisen, die Sie ohne Zweifel sehr leicht durch den Buchhandel erhalten können, und die nur 4 Bogen stark ist.

„Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, Berlin 1840 in der Finckeschen Buchhandlung.

„Ich erinnere mich, in Gersdorfs Repertorium damals eine sehr wegwerfende Recension dieses Buches gesehen zu haben, die (nemlich die Recension) übrigens für jeden etwas kundigen Leser das Gepräge hatte von einem ganz unwissenden Menschen herzurühren. Seitdem ich Gelegenheit gehabt habe diese kleine Schrift selbst einzusehen, muss ich ein sehr vortheilhaftes Urtheil darüber fällen. Namentlich hat sie vielmehr Concinnität und Präcision, als die grösseren Aufsätze des Lobatschefski, die mehr einem verworrenen Walde gleichen, durch den es, ohne alle Bäume erst einzeln kennen gelernt zu haben, schwer ist, einen Durchgang und Uebersicht zu finden.

„Ueber die Crelle 17 p. 303 angeführte experimentelle Begrenzung habe ich aber nichts in der Schrift von 1840 gefunden und ich werde mich daher wohl entschliessen müssen, einmahl deswegen an H. Lobatschefsky selbst zu schreiben, dessen Aufnahme als Correspondent unserer Societät ich vor einem Jahre veranlasst habe. Vielleicht schickt er mir dann den Kasanschen Boten. Doch wäre es möglich dass sich in den

---

*) Vgl. jedoch hierzu S. 397, Z. 22—27 und 432, Z. 12—16.
**) Soll wohl heissen: in einer deutschen Zeitschrift erschienenen.
***) „Unter dem Titel Ueber die Anfänge oder Principe der Geometrie. (Gauss.)
†) „Wie ich vermuthe in Petersburg erscheinenden. (Gauss.)

folgenden Jahrgängen der Kasanschen gelehrten Schriften von 1836—1838, wo auch lange Aufsätze von Lobatschefsky stehen, etwas darüber findet. Ich besitze diese zwar habe aber bisher, aus dem in meinem vorigen Briefe erwähnten Grunde, mich bisher nicht näher mit ihnen bekannt gemacht.

„In seinem Danksagungsschreiben wegen Aufnahme in der Societät schrieb mir übrigens Lobatschefsky damals, dass seine vielen administrativen Geschäfte (er scheint rector perpetuus der Universität zu sein) ihn jetzt aus den wissenschaftlichen Arbeiten ganz herausgebracht hätten."

Zu diesen Briefstellen sind einzelne Erläuterungen nöthig.

Die zweimal erwähnte Recension der „Geometrischen Untersuchungen" steht in Gersdorfs „Repertorium der gesammten deutschen Literatur" in Bd. 25, dem dritten Bande des Jahrgangs 1840, und zwar auf S. 147 f. Dieses Repertorium erschien damals im Verlage von F. A. Brockhaus in Leipzig am 1. und 15. jedes Monats, das uns hier angehende Heft also wahrscheinlich am 15. Juli 1840. Die Recension selbst hat folgenden Wortlaut:

„Nach des Vfs. Behauptung kann man, ohne auf Widersprüche zu gerathen, annehmen, dass sich durch einen gegebenen Punct zu einer gegebenen graden Linie zwei nicht zusammenfallende Parallelen ziehen lassen (vgl. S. 10) und zwischen diesen beiden Parallelen sollen grade Linien durch denselben Punct gehen können, die die gegebene Grade nicht schneiden und doch nicht parallel zu ihr sind, obgleich sie in derselben Ebne liegen. Auf eine solche Grundlage will der Vf. unter dem Namen der „Imaginären Geometrie" eine eigne Wissenschaft gründen. Die Grundzüge derselben liegen in diesem Schriftchen vor, jedoch wird dieses Princip und der dadurch erklärliche Satz S. 21: „Je weiter Parallellinien auf der Seite ihres Parallelismus verlängert werden, desto mehr nähern sie sich einander", wohl hinreichend das Schriftchen charakterisiren, um den Ref. jeder weiteren Beurtheilung zu überheben."

Unterzeichnet ist die Recension mit „140" und es wäre recht erwünscht zu wissen, welcher Name sich hinter dieser Ziffer verbirgt, leider sind aber bis jetzt alle meine Versuche, das zu ermitteln, vergeblich gewesen. Erwähnt sei nur, dass auch noch in dem ganzen Jahrgange 1841 des Repertoriums Besprechungen mathematischer Schriften enthalten sind, die mit 140 unterzeichnet sind, vom Jahrgange 1842 ab tritt dagegen an die Stelle der 140 die ebenso räthselhafte Zahl 11.

Welches ist nun aber die „kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung von Lobatschefski", die Gauss von Knorre geschickt bekommen hatte, und woher hatte Gauss die „Memoiren der Kasanschen Universität" und die „besondern Brochurn" erhalten, die er 1844 besass?

In der von Gauss hinterlassenen Bibliothek befinden sich zwei Exemplare*) der „Geometrischen Untersuchungen" und ausserdem folgende russische Schriften, die Arbeiten Lobatschefskijs enthalten: Erstens ein mit eigens dazu gedrucktem Titelblatte versehener Sonderabdruck der „Anwendung der

*) Das eine hatte sich Gauss wahrscheinlich kommen lassen, nachdem er durch die Recension in Gersdorfs Repertorium (s. S. 432 f.) auf das Schriftchen aufmerksam geworden war, das andre Exemplar hatte ihm später O. Struve zugeschickt.

imaginären Geometrie auf einige Integrale", die im 1. Hefte des Jahrgangs 1836 der Kasaner Gelehrten Schriften erschienen ist; zweitens eine beträchtliche Anzahl von einzelnen Heften dieser Gelehrten Schriften aus den Jahren 1835—41; endlich drittens zwei Hefte des Kasaner Boten aus dem Jahre 1830, enthaltend die beiden letzten Stücke der Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe", während die drei ersten Stücke dieser Abhandlung nur in einer sehr saubern Abschrift vorhanden sind.

Die „Kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung" ist höchst wahrscheinlich die „Anwendung der imaginären Geometrie"; einzelne Randbemerkungen und ein darin liegender Zettel mit Notizen zeigen deutlich, dass Gauss in dieser Arbeit gelesen hat, es scheint ihm aber entgangen zu sein, dass auch sie aus den Kasaner Gelehrten Schriften stammt.

Die einzelnen Hefte aus den Kasaner Gelehrten Schriften, die Gauss besass, hat ihm O. Struve verschafft. Dieser sagt nämlich in seinem schon auf S. 381 und 429 erwähnten Briefe an mich: „Ende August 1844 besuchte ich Gauss zum letzten Mal und traf ihn bei der Lecture einer kleinen Lobatschewskischen Schrift, welche ihn, wie er sagte, sowohl wegen ihres Inhalts wie auch wegen der Russischen Sprache, die er damals eifrig betrieb, interessirte. Eine Folge unseres Geplauders war es dass ich Ende desselben Jahres eine Sammlung Lobatschewskischer Schriften, so viel ich deren in Petersburg auftreiben konnte, an Gauss sandte." Andrerseits schreibt Gauss selbst*) am 11. December 1846 an Wilhelm Struve: „Gleichermassen bin ich für die übrigen Zusendungen zu dem verbindlichsten Danke verpflichtet; für die russischen Sachen von Lobatschewsky wahrscheinlich zunächst Ihrem Herrn Sohne, gegen den ich vor einigen Jahren bei seinem Hiersein meinen Wunsch ausgesprochen hatte; ich lasse mich seinem freundlichen Andenken angelegentlichst empfehlen. Mit meiner russischen Sprachkenntniss werde ich wohl etwas zurückgekommen sein, da ich seit länger als einem Jahre nicht dazu habe kommen können, auch nur einen russischen Buchstaben anzusehen, ich hoffe jedoch in der ersten freien Zeit das Versäumte schnell nachzuhohlen, und werde dann der Lecture jener interessanten Aufsätze meine besondere Aufmerksamkeit widmen. Die kleine deutsche Schrift von Lobatschewsky besass ich schon vorher selbst." Hier stimmt allerdings die Zeitangabe O. Struves „August 1844" nicht mit der Thatsache, dass Gauss die betreffenden Schriften bereits im Februar 1844 besass; jener Besuch bei Gauss muss also in Wirklichkeit schon früher stattgefunden haben: wie wir nachher sehen werden, vermuthlich im August 1843.

Unerklärt bleibt nur, wie Gauss in den Besitz der Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe" gelangt ist, denn diese hatte er im Februar 1844 augenscheinlich noch nicht. Sollte er den Gedanken, an Lobatschefskij selbst zu schreiben, ausgeführt und von diesem den Kasaner Boten und die ergänzende Abschrift bekommen haben? Vielleicht wird sich mit der Zeit auch dieser Punkt noch aufklären.

Einige nicht unwichtige Ergänzungen zu dem bisher Mitgetheilten

---

*) Diese Briefstelle verdanke ich Stäckel, durch dessen Vermittelung O. Struve sechs an seinen Vater Wilhelm Struve gerichtete Briefe von Gauss der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften geschenkt hat.

liefert der Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher, namentlich giebt er über die Anfänge und den ursprünglichen Zweck der russischen Studien von Gauss Aufschluss und liefert auch noch die Möglichkeit festzustellen, wann der vorhin erwähnte Besuch O. Struves bei Gauss stattgefunden hat.

Am 17. Aug. 1839 schreibt Gauss von Göttingen: „Im Anfange des vorigen Frühjahrs hatte ich, Aneignung irgend einer neuen Fertigkeit als eine Art Verjüngung betrachtend, angefangen mich mit der russischen Sprache zu beschäftigen, . . ., und fand schon viel Interesse daran" (Briefwechsel III, 242). Er erwähnt ferner, dass er früher zu demselben Zwecke das Sanskrit angefangen, diesem aber keinen Geschmack abgewonnen habe und dass sein Studium des Russischen seit dem Mai 1839 durch gewisse Arbeiten fast ganz unterbrochen gewesen sei, bittet aber jetzt Schumacher um Besorgung russischer Bücher, da er es wieder anfangen wolle. Schumacher schickt ihm am 22. Aug. 1839 einen russischen Kalender und Gauss dankt dafür am 8. Sept. (Briefwechsel III, 247 und 269). Am 8. Aug. 1840 (Briefwechsel III, 394) berichtet Gauss, er besitze drei Bände der poetischen Werke von Puschkin, wünsche aber auch russische Prosalektüre zu haben, und bittet daher Schumacher, der nach Petersburg reisen will, ihm Romane mitzubringen. Am 7. Okt. 1840 schreibt Schumacher (III, 403) er habe die Werke von Bestúscheff gekauft und bringe als Geschenk Schuberts fünf Bände Memoiren des russischen Topographischen Bureaus mit. Gauss dankt ihm am 9. Okt. und 21. Dec. 1840 (III, 405 und 430). Am 29. Dec. 1841 (IV, 45) schreibt Gauss, ass er wenig zum Russischen komme. Am 13. Juni 1845 (V, 12) empfiehlt ihm Schumacher einen gewissen Bolotoff zur Aufklärung über die Aussprache des Russischen. Der Name Lobatschefskijs kommt in keiner dieser Briefstellen vor.

Mit Stäckel, dem ich die Zusammenstellung dieser Briefstellen verdanke, schliesse ich hieraus, dass der Wunsch, Lobatschefskijs russische Werke lesen zu können, nicht die ursprüngliche Veranlassung zu Gaussens russischen Studien gewesen ist. Ferner halten wir es für ziemlich sicher, dass Gauss am 8. Aug. 1840 die kleine von Knorre übersandte Abhandlung in russischer Sprache noch nicht besessen hat, denn sonst würde er sie gewiss erwähnt haben. Er wird diese also zwischen dem 8. Aug. 1840 und dem 1. Febr. 1841 erhalten haben.

O. Struve wird in zwei Briefen Schumachers erwähnt. Am 24. Juli 1843 (IV, 162) heisst es da: „Der junge Struve ist Sonnabend . . . nach Bonn gegangen, und kehrt über Göttingen, Gotha, Leipzig und Berlin zurück", und am 10. Aug. 1844 (IV, 281): „Der junge Struve und . . . wollen Sie gegen Ende dieses Monats in Göttingen besuchen. Struve kennen Sie . . . ." Da Gauss im Febr. 1844 die von Struve übersandten Schriften schon besass, wird also der auf S. 435, Z. 15 f. erwähnte Besuch O. Struves bei Gauss der erste von diesen beiden Besuchen gewesen sein.

Ueber Knorre endlich vgl. man S. 437 f.

S. 399, Z. 5—9. Nach einer Mittheilung F. Kleins (vgl. Gött. Nachr. 1896, S. 4) hat Gauss am 23. November 1842 den Kaiserlich Russischen Staatsrath Nicolaus Lobatschefski zum Korrespondenten der Göttinger Societät vorgeschlagen, mit der Begründung, dieser sei einer der aus-

gezeichnetsten Mathematiker des russischen Reiches. Dass Gauss die Uebersendung des Diploms mit einem eigenhändigen Briefe begleitet hatte, geht aus Lobatschefskijs Dankschreiben hervor, das folgenden Wortlaut hat:

„Ihr gütiges Schreiben erhielt ich zugleich mit dem Diplom als Mitglied der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Ich ersuche Sie ergebenst der Königl. Gesellschaft meinen Dank zu bezeugen und derselben zu versichern, dass ich mir es für eine grosse Ehre schätze, zu den correspondirenden Mitgliedern derselben zu gehören, und ich wünsche, dass jede meiner Arbeiten im gelehrten Fache würdig seyn möchte, mit den ausgezeichneten Schriften der Gesellschaft vereinigt zu werden, ich werde wenigstens alle meine Bemühungen dahin richten.

„Verzeihen Sie mir, dass ich so lange zögerte Ihnen zu antworten, der unglückliche Brand der Stadt trägt die Schuld davon; dieser hatte sowohl meine Gesundheit als auch meine persönlichen Angelegenheiten etwas zerstört, und mich ausserdem noch mit einer Menge besonderer Dienstgeschäfte überhäuft.

„Empfangen Sie bey dieser Gelegenheit zugleich die Versicherung meiner ausgezeichnetsten Hochachtung, mit welcher ich für immer verbleibe

Ewr. Hochwohlgeboren

ergebenster

N. Lobatschewsky."

Die noch folgenden Titel lasse ich ebenso wie die Anrede als überflüssig weg. Wie schon im Texte erwähnt, ist in diesem Briefe nur die Unterschrift N. Lobatschewsky eigenhändig.

S. 399, Z. 10 — 2 v. u. Diese Notizen entnehme ich der Abhandlung: „Ueber den Gang der Temperatur zu Kasan während des Jahres 1833" von E. Knorr, s. S. 647 ff. des 42. Bandes von Poggendorffs Annalen, Leipzig 1837. Danach wurden übrigens die angestellten Beobachtungen regelmässig im Kasaner Boten veröffentlicht, so lange dieser erschien.

S. 400, Z. 2 — 13. Wassiljef S. 226.

S. 400, Z. 14 — 27. Auf die Vermuthung, dass E. Knorr (1805—1879) und nicht K. F. Knorre (1801—1883) es gewesen sei, dem Gauss die „Kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung" (vgl. S. 398 und 432, Z. 24 f.) verdankte, hat mich Stäckel gebracht. In der That spricht dafür schon der Umstand, dass jene „Kleine Abhandlung" aller Wahrscheinlichkeit nach der mit eignem Titel versehene Sonderabdruck der „Anwendung der imaginären Geometrie" war (s. S. 435), denn einen solchen Abdruck konnte Gauss doch wohl nur von einem Manne bekommen haben, der zu Lobatschefskij in persönlichen Beziehungen stand: während nun bei K. F. Knorre solche Beziehungen höchst unwahrscheinlich sind, erklären sie sich bei E. Knorr auf die natürlichste Weise von der Welt aus dem langen Zusammenwirken beider in Kasan. Andrerseits kann man sich auch sehr gut erklären wie Gauss dazu kam, Knorre für Knorr zu schreiben: K. F. Knorre war, was schon sein Vater (1759 — 1810) gewesen war, Astronom, der Name Knorre war daher Gauss viel geläufiger als der des wenig bekannten Physikers Knorr.

Uebrigens habe ich jetzt wenigstens dafür den sichern Beweis, dass K. F. Knorre nicht der Uebersender jener „Kleinen Abhandlung" gewesen sein kann. Der Knorre nämlich, von dem Gauss in dem Briefe vom

1. Februar 1841 spricht (s. S. 432), muss vor diesem Zeitpunkte in Göttingen oder anderswo mit Gauss zusammengetroffen sein; in dem Briefe heisst es ja: „Wie mir Knorre sagte . . .“. Nun aber erfahre ich soeben (Oktober 1898) von K. F. Knorres Sohn, Herrn Professor V. Knorre, Observator an der Berliner Sternwarte, dass sein Vater in der Zeit vor 1841 nur einmal in Deutschland gewesen ist und damals Gauss nicht angetroffen hat. Damit ist also die Möglichkeit, dass Gauss ihn gemeint habe, ausgeschlossen, und es wird immer wahrscheinlicher, dass E. Knorr gemeint ist. Freilich habe ich dafür bis jetzt nur die hier und im Texte angegebenen Wahrscheinlichkeitsgründe, keine wirklich zwingenden Beweise*).

Wassiljef, dem ich im Januar 1898 die Stäckelsche Vermuthung mittheilte, konnte mir sofort bestätigen, dass E. Knorr mit Lobatschefskij befreundet gewesen ist, er verwies mich auf die Veröffentlichung Knorrs von 1841, zu der Lobatschefskij seine Abhandlung über unendliche Reihen beigesteuert hat (s. S. 399), gab mir ferner Nachricht von der grossen Reise, die Knorr 1840 gemacht hat**), und theilte mir endlich die im Texte wiedergegebenen Stellen aus dem 1849 in Kijef erschienenen Buche Knorrs mit. Ueber die weiteren Schicksale des Mannes wusste er allerdings nur, dass dieser 1858 in den Ruhestand getreten und nach Kötzschenbroda bei Dresden übergesiedelt war.

Nach verschiedenen vergeblichen Versuchen ist es mir dann gelungen festzustellen, dass E. Knorr einen einzigen Sohn Alexander hinterlassen hat, der in St. Petersburg als Inspektor der Kaiserlich Russischen Staatsbank lebt. Dieser hat mir, als ich mich an ihn wendete, auf das Bereitwilligste Alles mitgetheilt, was er selbst wusste, und namentlich nach den mündlichen Erzählungen seines Vaters dessen freundschaftliche Beziehungen zu Lobatschefskij bestätigt. Nach diesen Erzählungen habe sich Lobatschefskij im Privatleben beständig von allen andern Professoren der Universität Kasan fern gehalten und nur mit E. Knorr in freundschaftlichem Verkehr gestanden. Briefe Lobatschefskijs an E. Knorr sind leider nicht vorhanden, auch erinnert sich Herr A. Knorr nicht, gehört zu haben, dass sein Vater Gauss persönlich gekannt habe, und ebensowenig hat er in den Papieren seines Vaters Hindeutungen darauf finden können, nur dessen neunmonatliche Reise von 1840 steht auch nach ihm fest.

Den Mittheilungen des Herrn A. Knorr über den Lebensgang seines Vaters entnehme ich Folgendes:

Ernst Knorr ist geboren am 23. November 1805 in Herzberg in

*) Bei dieser Gelegenheit möchte ich noch eine andre Vermuthung aussprechen, die jedenfalls Manches für sich hat, die Vermuthung nämlich, dass auch das Erscheinen der „Geometrischen Untersuchungen“ bei einem Berliner Verleger (G. Fincke) durch Knorr vermittelt worden ist. Jedenfalls war Knorr vermöge seiner alten Berliner Beziehungen sehr gut dazu in der Lage, auch ist es auffallend, dass er in der Vorrede zu seinem „Versuche einer Darstellung der Elemente der Geometrie“ nur die „Geometrischen Untersuchungen“, sonst aber keine Schriften Lobatschefskijs erwähnt. Etwas sicheres wird sich freilich über diesen Punkt kaum feststellen lassen, zumal da, wie Stäckel schon vor längerer Zeit ermittelt hat, der Fincke'sche Verlag in andre Hände übergegangen ist und der jetzige Inhaber (Kampffmeyer) keine Auskunft zu geben vermag.

**) Aus dem auf S. 426 erwähnten Tagebuche Littrows hat Stäckel festgestellt, dass Knorr auf dieser Reise Wien berührt und dort im „Schwan“ gewohnt hat.

der Provinz Sachsen und gestorben am 30. Mai 1879 in Kötzschenbroda bei Dresden als Kaiserlich Russischer Staatsrath und Professor emeritus. Studirt hat er*) vom Herbst 1823 bis Ende des Sommerhalbjahrs 1828 zu Berlin und zwar vorzugsweise Mathematik und Physik und erhielt 1827 von der philosophischen Fakultät eine goldene Preismedaille. Von Alexander v. Humboldt wurde er dann zum Amanuensis bei dessen Vorlesungen gewählt und erwarb im April 1830 in Berlin den philosophischen Doktorgrad mit einer Arbeit: Disquisitiones quaedam de aestu maris, gedruckt Berlin 1830. Nachdem er zeitweilig Hülfsarbeiter an der Königlichen Bibliothek und Lehrer der Physik am Joachimsthalschen Gymnasium gewesen war, folgte er im December 1832 einem Rufe als ordentlicher Professor der theoretischen und Experimentalphysik an der Universität Kasan. Aus Gesundheitsrücksichten wurde er 1846 nach Kijef versetzt als Professor der Physik und der physikalischen Geographie, wo er bis 1858 blieb.

An gedruckten Arbeiten E. Knorrs sind nach den Angaben seines Sohnes zu erwähnen:

1) Die Dissertation. 2) Ueber Frasers Höhenmessungen, siehe Oltmanns, Fundamente der Geographie. 3) Ueber den Gang der Temperatur zu Kasan im Jahre 1833 (vgl. S. 437, Z. 26 ff.). 4) Bemerkungen in Bezug auf die von Prof. A. Erman gegebene Bestimmung der absoluten Höhe von Kasan (im Bulletin de la soc. imp. des naturalistes de Moscou). 5) Kurzer Bericht über eine wissenschaftliche Reise unternommen in den Monaten Juli, August, September und October 1836 (ebenda). 6) Notiz über einige Apparate zu hydrometrischen Messungen in Strömen (Bull. de la classe phys.-math. de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Petersbourg). 7) Meteorologische Beobachtungen aus dem Lehrbezirk der Kaiserlich-Russischen Universität Kasan. Heft I, 1841, dazu als Anhang Lobatschefskijs Aufsatz „Ueber die Convergenz der unendlichen Reihen" und ein Aufsatz von E. Knorr selbst: „Allgemeine Bemerkungen über den Vortrag der Physik auf Gymnasien", der letztere ist datirt: Kasan im März 1838. Manuskript und Abzüge des zweiten Heftes dieser Beobachtungen gingen am 24. August (5. September) 1842 bei dem grossen Brande von Kasan mit der Universitätsbuchdruckerei zu Grunde. 8) Untersuchungen über das von Prof. Moser zu Königsberg entdeckte dunkle Licht uud über die Erzeugung von Wärmebildern (Bull. de St. Petersbourg). 9) Aufsätze über Thermodynamik in den Pariser Comptes Rendus und in Poggendorffs Annalen von Band 68 an. 10) Ueber Photographie (in Poggendorffs Annalen und in Dinglers polytechnischem Journale). 11) Versuch einer Darstellung der Elemente der Geometrie. Kiew 1849. 12) Der Tastengyrotrop (in Poggendorffs Annalen). 13) Beobachtungen eines Irrlichts (ebenda). 14) In russischer Sprache: „Beitrag zur Geschichte der Automaten" (in den Kasaner Gelehrten Schriften) und: „Korrespondenz mit L. Breguet über einen von letzterem nach Prof. Knorrs Ideen konstruirten stündlichen Thermographen (im Journal des Kaiserlich Russischen Ministe-

*) Vorher war er 1820 nach Dresden gegangen, um auf der dortigen Akademie die Baukunst zu studiren, 1822 aber war er nach Berlin übergesiedelt und hatte sich da im Laufe eines Jahres für das Universitätsstudium vorbereitet (s. seine nachher erwähnte Dissertation).

riums für Volksbildung). 15) Ueber die Messung der Gehörweite und die Ungleichheit derselben für das rechte und linke Ohr. Dresden April 1861. 16) Ueber die tägliche Variation des Barometers und die athmosphärische Lunar-Fluth. Vgl. auch Poggendorffs biogr. Wörterbuch, Bd. I u. III, Artikel Knorr, sowie den Catalogue der Royal Society of London.

S. 401, Z. 4—6. Der genaue Titel des Buches, von dem ich ein Exemplar Herrn A. Knorr verdanke, lautet: „Versuch einer Darstellung der Elemente der Geometrie bis zum 29-sten Satze des 1-sten Buches der Elemente Euclids, von Ernest Knorr, D-r. phil. Prof. ord. der Physik an der Universität des Heil. Wladimir u. s. w. Kiew. In der Universitäts-Druckerei. 1849." Das Buch enthält V und 51 Seiten Oktav mit einer Figurentafel. Der Beweisversuch steht im Kapitel III, S. 33 ff.

Den unendlichen Flächenraum, der eingeschlossen wird von einer begränzten Geraden AB und von zwei dazu senkrechten unbegränzten Geraden AC und BD nennt E. Knorr ebenso wie Legendre (vgl. S. 317 f.) ein rechtwinkliges Zweieck, AB nennt er die Grundlinie, AC und BD die Seiten des Zweiecks. Er zeigt, dass rechtwinklige Zweiecke mit gleicher Grundlinie kongruent sind und dass von zwei Zweiecken mit verschiedenen Grundlinien das, dessen Grundlinie grösser ist, das andre in sich enthalten kann, woraus er schliesst, dass jenes Zweieck grösser ist als dieses und dass zwei gleiche rechtwinklige Zweiecke gleiche Grundlinien haben. Ferner bemerkt er, dass der unendliche Flächenraum, der von den Schenkeln eines rechten Winkels begränzt wird, unendlich gross ist im Vergleiche zu jedem rechtwinkligen Zweiecke, weil nämlich das Zweieck unendlich oft in diesem Winkelraume Platz hat.

Es folgt ein vollkommen strenger Beweis für den Satz, dass die Winkelsumme im Dreiecke nicht grösser ist als zwei Rechte, doch unterscheidet sich dieser Beweis kaum von dem Legendreschen (vgl. S. 330, Z. 10—12). Sodann wird, wieder ganz richtig, der Satz bewiesen: „Fällt man von beliebigen Punkten einer Seite eines rechtwinkligen Zweyecks Perpendikel auf die andere Seite, so ist keiner dieser Perpendikel kleiner als die Grundlinie, und jeder folgende Perpendikel nicht kleiner als ein vorhergehender" und hieraus folgt sofort: „Fällt man von irgend einem Punkte einer Seite eines rechtwinkligen Zweyecks einen Perpendikel auf die zweyte Seite, so ist die dadurch entstehende vierseitige Figur unvergleichbar klein in Bezug auf das rechtwinklige Zweyeck", weil sie nämlich unendlich oft in diesem Zweiecke Platz hat.

Aber nun kommt der Fehler. Es sei $CABD$ ein rechtwinkliges Zweieck mit der Grundlinie AB; auf den Seiten BD und AC mögen die Punkte I und K so liegen, dass IK senkrecht zu AC ist. Wäre nun IK nicht gleich AB sondern grösser, so wäre der Winkel BIK spitz, sein Nebenwinkel KID stumpf. Machte man daher $KL = AB$, wo L zwischen K und I fiele, und errichtete man auf KI in L und I nach der Seite von C und D hin die beiden Senkrechten LN und IP, die beide ganz im Innern des Zweiecks $CABD$ lägen, so hätte man drei rechtwinklige Zweiecke: $CABD$, $PIKC$, $NLKC$. Jedes dieser Zweiecke enthielte das darauf folgende in sich und wäre daher nach Knorr grösser als dieses, aber das erste und dritte hätten gleiche Grundlinien und wären folglich einander gleich, worin ein Widerspruch liegen würde.

Der Fehler liegt offenbar darin, dass Knorr die Begriffe der Gleichheit, des Grösser- und Kleinerseins ohne Weiteres auf unendliche Grössen, wie seine Zweiecke es sind, anwendet, ein Verfahren, das durchaus unzulässig ist. Es ist genau derselbe Fehler wie ihn Legendre begangen hat, nur dass dieser blos den Begriff der Gleichheit anwendet. Die Knorrschen Betrachtungen sind daher viel lehrreicher als die Legendreschen.

S. 401, Z. 15—12, 6—1 v. u. Näheres bei Wassiljef S. 226 f., 229 f.

Zu Kapitel IX.

S. 402, Z. 7 v. o. — 1 v. u. Janischefskij S. 260 f.

S. 403, Z. 1—13. Nach Janischefskij S. 261 und nach Mittheilungen Wassiljefs. Nach diesen waren Lobatschefskijs Kinder: 1) der im Texte erwähnte, Alexej, 2) Nikolaj, geboren 1835, jetzt in Sibirien im Gouvernement Tomsk, 3) Alexander, gestorben 1892 als Oberst in Petersburg, 4) Wárwara verehelichte Achlópkof, lebt noch in Petersburg.

S. 403, Z. 14—19 vgl. G. A. I, S. VII und II, S. 7, ferner den Aufsatz von Popof, Wospominánije o slúschbje i trudách Lobatschéfskawa (Erinnerung an die Wirksamkeit und die Bemühungen Lobatschefskijs) in den K. G. S. 1857, IV, S. 153—159.

S. 403, Z. 17—13 v. u. Janischefskij S. 260.

S. 403, Z. 2, 1 v. u. Popof a. a. O. und G. A. I, S. VII und II, S. 7.

S. 404, Z. 2—5. Wassiljef S. 233. Von Bunjakofskij sind hier folgende Arbeiten zu nennen: „Considérations sur les démonstrations principales de la théorie des parallèles", lu le 27. oct. 1843 und „Nouvelle théorie des parallèles", lu le 12. dec. 1845, erschienen in den Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, 6. série, Sciences math. et phys., Bd. IV, Petersburg 1850, S. 87—107 und 207—232. Endlich die selbständige Schrift: Параллельныя линіи (Die Parallellinien), 77 S., 8⁰, Petersburg 1853, Verlag der Akademie.

S. 404, Z. 8—10. Janischefskij S. 260. Das geschah im Jahre 1855.

S. 404, Z. 12 v. o. — 5 v. u. Wassiljef S. 232 f. Ein Bild, das Lobatschefskij als kräftigen Mann darstellt, ist dem zweiten Bande der G. A. beigegeben, es ist nach einem Oelgemälde im Besitze der Universität Kasan photographisch vervielfältigt. Das Bild, das den ersten Theil des vorliegenden Buches schmückt, stellt ihn in höherem Lebensalter dar.

S. 405, Z. 1 v. o. — 4 v. u. Popof a. a. O.

S. 405, Z. 3 v. u. — 406, Z. 5. Janischefskij S. 261.

S. 406, Z. 7—14. Janischefskij S. 260.

S. 406, Z. 15 v. o. — 1 v. u. Wassiljef S. 231 f.

Zu Kapitel X.

S. 407, Z. 5—1 v. u. So schreibt Gauss in dem auf S. 433 angeführten Briefe, aber man vergesse nicht, dass Gauss jedenfalls zu dieser Zeit die Neuen Anfangsgründe noch nicht gelesen hatte, wenn er überhaupt jemals dazu gekommen ist, das zu thun.

S. 411, Z. 8—14. Die auf S. 254 f. aus der Pangeometrie mitgetheilte Ableitung einiger Gleichungen für ein Viereck mit drei rechten Winkeln kann schon in gewissem Sinne als Beleg hierfür dienen. Noch

auffälliger ist es aber bei der Bestimmung der Winkelsumme eines geradlinigen Dreiecks aus dessen Seiten, man vergleiche nur die aus der „Imaginären Geometrie" entnommene Ableitung dieser Winkelsumme mit der in der „Pangeometrie" gegebenen, G. A. I, S. 536 ff., II, S. 666 ff.

S. 411, Z. 19—24. Wassiljef S. 225, 240—242 und in dem Bulletin of the New-York mathematical society, Bd. III, 1894, S. 231—235.

S. 411, Z. 8—1 v. u. Mittheilung Wassiljefs.

S. 412—417. Einzelne Bruchstücke aus diesen Betrachtungen hat auch schon Wassiljef mitgetheilt, vgl. die Z. 5 f. angeführten Stellen.

S. 415, Z. 20—10 v. u. Lobatschefskij spricht nur von stetigen Funktionen, die „für gewisse x" unterbrochen sind, dagegen erwähnt er es nicht als eine wenigstens denkbare Möglichkeit, dass eine Funktion an jeder Stelle eines Intervalls, innerhalb dessen sie stetig ist, unterbrochen sein könne. Man darf daher auch nicht ohne Weiteres behaupten, dass er den Begriff einer stetigen, überhaupt nicht differentiirbaren Funktion wirklich gehabt habe, so nahe es uns auch heute liegt, dies aus seinen Worten herauszulesen. Immerhin ist es sehr wohl möglich, dass er den Wesensunterschied zwischen Stetigkeit und Differentiirbarkeit in seinem ganzen Umfange erkannt hatte, aber aus dem Wortlaute seiner Aeusserungen geht das jedenfalls nicht mit Sicherheit hervor. Uebrigens wäre es vielleicht besser, für „ununterbrochen" (непрерывный) und „unterbrochen" (ломаный) zu sagen: „ungebrochen" und „gebrochen". Das russische Wort für stetig ist постепенный.

S. 417, Z. 16—14 v. u. Hier befindet er sich in einem Irrthume, denn sobald eine Funktion innerhalb eines Intervalls stetig ist, ist sie in diesem Intervalle bekanntlich auch integrirbar.

S. 420, Z. 9—20. Der Brief steht auf S. 246 dieses fünften Bandes; die ganze Stelle findet man P. Th. S. 235. Es unterliegt keinem Zweifel, dass diese Erwähnung Lobatschefskijs dessen Namen zuerst in weiteren cf. p. 455 Kreisen bekannt gemacht hat, jedoch ist der Briefwechsel Gauss-Schumacher nicht die erste gedruckte Veröffentlichung, in der Lobatschefskijs Leistungen gewürdigt werden. Wassiljef hat mich auf ein noch früher erschienenes Buch aufmerksam gemacht, in dem das geschehen ist, nämlich auf die Prolégomènes philosophiques de la Géométrie et solution des postulats par J. Delboeuf, Docteur en philosophie et en sciences physiques et mathématiques suivis de la traduction, par le même, d'une dissertation sur les principes de la géométrie*) par F. Ueberweg, Dr. en philos. et privatdocent à l'Université de Bonn. Liège, Paris et Leipzig, 1860.

In dieser Schrift liest man auf S. 75 f.: „Y aurait il possibilité, en partant d'hypothèses autres que les axiomes reconnus, de construire une science enchaînée, quoique fausse, comme il arrive dans les sciences dites naturelles? — A cet argument force nous aurait été de répondre oui sans pouvoir établir par le fait la justesse de notre réponse, s'il ne s'était pas trouvé quelqu'un qui s'est chargé de poser ce fait. Partant d'une idée qui

---

cf. p. 456 *) Es ist das die Abhandlung: „Die Principien der Geometrie, wissenschaftlich dargestellt", Archiv für Philologie und Pädagogik, Band 17 (1851). Vgl. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, Bd. II, Paderborn 1898, S. 204—207.

avait été émise par Gauss, M. Lobatschewsky, recteur de l'Université de Casan, a essayé de fonder une géométrie qu'il intitule imaginaire dans la supposition que la somme des trois angles d'un triangle soit plus petite que deux droits. Il a développé ses idées dans une dissertation qu'on peut lire dans le journal de Crelle (1837, page 295); mais l'auteur y renvoie à un ouvrage publié par lui cinq ans auparavant dans le journal de Casan, que nous n'avons pu nous procurer; il nous a été impossible ainsi de juger, nous ne disons pas de la certitude de ses raisonnements qui semblent rigoureux, mais de la signification fondamentale de son hypothèse*)." Sodann theilt Delboeuf auf zwei Seiten einige Ergebnisse der Abhandlung Lobatschefskijs mit.

Wie Delboeuf auf Lobatschefskij gekommen ist, das erzählt er in dem kurz vor seinem Tode erschienenen Buche: „La géométrie euclidienne sans le postulatum d'Euclide", Paris bei Hermann, Liége bei Desoer, 1897. Er berichtet da, 1858 sei er nach Bonn gekommen und habe mit Ueberweg viel über Geometrie gesprochen. „Nous prenions souvent pour arbitre son ami Lipschitz, privat-docent comme lui, avec qui il m'avait mis en rapport. C'est même Lipschitz qui me signala, dans le Journal de Crelle, les articles de Lobatschewsky dont je donne une courte analyse dans mes Prolégomènes." Delboeuf ist bis an sein Lebensende überzeugter Anhänger der Euklidischen Geometrie als der allein wahren geblieben.

Durch diese Notizen, die mir Wassiljef hatte zukommen lassen, war festgestellt, dass Lipschitz schon vor dem Erscheinen des Gauss-Schumacherschen Briefwechsels die Ergebnisse Lobatschefskijs gekannt und gebührend gewürdigt hatte. Es schien mir daher angezeigt, bei Lipschitz selbst anzufragen, um zu erfahren, wodurch er auf Lobatschefskij aufmerksam geworden sei. Für seine, Bonn d. 7. October 1898 datirte, sehr eingehende Beantwortung meiner Anfrage möchte ich ihm auch hier meinen besonderen Dank aussprechen. Ich theile daraus mit, was sich unmittelbar auf unsre Angelegenheit bezieht:

„In dem letzten Jahre, in dem ich in Berlin studirte, Michael 1852 bis 1853, beschäftigte ich mich zum ersten Male mit Kants Kritik der reinen Vernunft. Dirichlet, in dessen Hause ich eingeführt war, und der von meinem Studium des Kantischen Werkes wusste, pflegte sich, wenn ich hinkam, genau zu erkundigen, wie ich in meiner Beschäftigung weiterrückte. An den Abschnitt Kants vom Raume anknüpfend sagte er zu mir, dass das elfte Euklidische Axiom nicht bewiesen werden könnte. Dies sei dadurch festgestellt, dass man eine Geometrie bilden könne, bei welcher dieses Axiom nicht vorausgesetzt werde. Es gebe zwei solcher Geometrien, die eine von Gauss, die andere von Lobatschefskij. Für die Geometrie von Lobatschefskij nannte er mir die Abhandlung, die im 17. Bande des Crelleschen Journals erschienen ist, als Quelle. Auf welche Weise er die imaginäre Geometrie von Gauss kennen gelernt hatte, gab er nicht an.

„In dem Winter 1852—53 hörte ich bei Dirichlet die Vorlesung über die Theorie der Anziehung nach dem Newtonschen Gesetze zum

*) „Peut-être le triangle est-il projeté sur une surface particulière, ce qui expliquerait comment ses angles deviennent rigoureusement égaux à deux droits quand il est infiniment petit . . . ."

zweiten Male; ich hatte sie 1850 zum ersten Male gehört, war aber durch Krankheit gehindert worden, bis zum Ende zu folgen. Bei Gelegenheit eines Gesprächs über die Vorlesung, die ich in dem Winter 1852—53 hörte, sagte mir Dirichlet, er habe untersucht, wie sich die Theorie der Anziehung nach dem Newtonschen Gesetze gestalte, wenn dabei die Gaussische Theorie des imaginären Raumes zu Grunde gelegt wird, ohne jedoch irgend welche Einzelheiten hinzuzufügen. Diese letzte Aeusserung Dirichlets habe ich bei Veranlassung der Abhandlung: Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist, Borchardts Journal Bd. 74, S. 117 [1872] in einer Anmerkung mitgetheilt."

Lipschitz bestätigt sodann aus eigner Erinnerung die Angaben Delboeufs und bemerkt noch, dass dessen Aeusserung „Partant d'une idée qui avait été émise par Gauss" für ihn etwas auffallendes habe. „Es wird hier zwar nicht gesagt, dass L. von einem Gedanken ausgegangen sei, der ihm als ein Gedanke von Gauss bekannt war, aber der Leser kann doch bei diesen Worten sehr leicht voraussetzen, dass L. von einem Gedanken ausgegangen sei, von dem er wusste, dass ihn Gauss gehabt hatte. In der That aber ist mir niemals irgend eine Mittheilung gemacht worden, aus der zu schliessen wäre, dass L. durch Kenntnissnahme von Gauss' Forschungen auf seine eigenen Gedanken gekommen sei."

Uebrigens sagt Lipschitz, er habe damals Lobatschefskijs Arbeit im Crelleschen Journale nur äusserlich gekannt, von den „Geometrischen Untersuchungen" habe er erst viel später Kenntniss erhalten.

Zu alledem möchte ich noch bemerken, dass die Aeusserung Delboeufs „Partant d'une idée . . ." in der That um so auffallender ist, als sie aus der Zeit vor dem Erscheinen des Gauss-Schumacherschen Briefwechsels stammt, doch erklärt sie sich wohl ungezwungen dadurch, dass Delboeuf von Lipschitz Einiges über die Aeusserungen Dirichlets erfahren und das missverständlich aufgefasst hat; vielleicht liegt aber auch nur eine Nachlässigkeit im Ausdrucke vor.

Dirichlet endlich hatte, wenigstens soweit es sich um Ideen von Gauss handelt, seine Kenntniss aus dessen eignem Munde; denn er hat, als er in den zwanziger Jahren Gauss in Göttingen besuchte, mit diesem ein Gespräch über nichteuklidische Geometrie gehabt. Das beweist ein Brief von Gauss an Olbers vom 3. Mai 1827 (im Gaussarchive), vgl. auch einen Brief Dirichlets an Gauss vom April 1828, Dirichlets Werke Bd. II, S. 377 (Mittheilung von Stäckel).

S. 421, Z. 1—4. Baltzer, Elemente der Mathematik, Bd. II, 2. Auflage, Leipzig 1867, S. III, 13—17, 146. Die Frage, wodurch Baltzer auf Lobatschefskij aufmerksam geworden ist, harrt noch der Beantwortung. Lipschitz schreibt, er habe Baltzer in Dirichlets Hause kennen gelernt, aber keinen wissenschaftlichen Verkehr mit ihm gehabt und ihn also auch nicht auf Lobatschefskij hinweisen können. Dirichlet könnte das gethan haben, doch steht dem entgegen, dass Baltzer in Bd. II der 1. Ausgabe seiner Elemente (1862) weder Lobatschefskij noch J. Bolyai erwähnt. Vielleicht stammt daher seine Kenntniss doch aus dem 5. Bande des Briefwechsels Gauss-Schumacher (1863), nur wird in diesem Briefwechsel der Appendix J. Bolyais nirgends erwähnt.

S. 421, Z. 4—7. In der Vorrede zu seinem Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire, Paris 1867, sagt Houël, er verdanke die Kenntniss der Arbeiten von Lobatschefskij und J. Bolyai dem Dr. Baltzer in Dresden. Seine französische Uebersetzung der G. U. hat den Titel: Études géométriques sur la théorie des parallèles par J. N. Lobatschewsky, traduit de l'Allemand. Suivie d'un extrait de la Correspondance de Gauss et Schumacher. Paris 1866, sie ist ein Sonderabdruck aus den Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Tome IV. S. 83—128. Bordeaux 1866.

S. 421, Z. 7—9. Houël schreibt am 29. Mai 1867 aus Bordeaux an den Baumeister Franz Schmidt, damals noch in Temesvár: „Le professeur Battaglini, de Naples, s'occupe activement de la géométrie non-euclidienne, ... Il va publier, d'après la copie que je lui ai procurée, une traduction italienne de la Pangéométrie de Lobatschewsky.“ Am 30. Juli 1867 erzählt er, dass er von den zwei Exemplaren des Bolyaischen Tentamens, die er durch Baltzer und F. Schmidt erhalten hatte, das eine an Battaglini geschickt habe. Endlich schreibt er am 27. November 1867: „J'ai reçu un gros volume de Mémoires de Lobatschewsky écrits en russe, il est vrai, mais que je fais traduire par un de mes anciens élèves, jeune polonais très intelligent . . . . Le Giornale di Matematiche de Naples publie en ce moment une traduction italienne de la Pangéométrie de Lobatschewsky. Il donnera bientôt la traduction de l'Appendice de Bolyai.“ Auf diese Briefe hat mich Stäckel aufmerksam gemacht, und F. Schmidt hat mir dann auf meine Bitte die Originalbriefe zugesandt, denen die angeführten Stellen entnommen sind.

Battaglinis Uebersetzung der Pangeometrie steht im Giornale di Matematiche Bd. V, S. 273—336, Neapel 1867 und hat den Titel: „Pangeometria o sunto di geometria fondata sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele, per N. Lobatschewsky. (Versione dal Francese.)“

S. 421, Z. 9—11. Vgl. den eben erwähnten Brief Houëls an F. Schmidt vom November 1867. Zu den „Mémoires de Lobatschewsky écrits en russe“, von denen Houël darin spricht, müssen jedenfalls die „Neuen Anfangsgründe“ gehört haben, denn Frischauf erzählt in der Vorrede zu seinen „Elementen der absoluten Geometrie“, dass ihm Houël das Manuskript seiner Uebersetzung des in russischer Sprache erschienenen Hauptwerkes von Lobatschefsky „Neue Principien der Geometrie . . .“ zur Verfügung gestellt habe.

S. 421, Z. 12—9 v. u. J. Frischauf, „Absolute Geometrie nach Johann Bolyai“, Leipzig bei Teubner, 1872 und „Elemente der absoluten Geometrie“, ebenda 1876.

S. 421, Z. 7—5 v. u. Halsteds Uebersetzung der „Geometrischen Untersuchungen“ hat den Titel: „Geometrical Researches on the theory of parallels, by N. Lobatschewsky, translated from the Original by G. B. Halsted, Austin, Texas. Die Vorrede zur ersten Ausgabe ist datirt vom 1. Mai 1891, die zur vierten vom 1. Januar 1892.

S. 421, Z. 4 v. u. — 422, Z. 17. Vgl. „Compte rendu du bureau local du comité Lobatschefsky, 1893—1895. Kasan 1895.“

Verzeichniss

der gedruckten Werke Lobatschefskijs nach der Zeitfolge ihres Erscheinens.

Die Abkürzungen K. B.; K. G. S. und G. A. haben die auf S. 237 erklärte Bedeutung.

---

1. О резонансѣ, или взаимномъ колебаніи воздушныхъ столбовъ (Ueber die Resonanz oder wechselseitige Schwingung von Luftsäulen).

K. B. Theil 24: November und December 1828, S. 213—224.

Ein Auszug aus der Abhandlung von Wheatstone: „On the resonances or reciprocated vibrations of columns of air", Quarterly Journal of Science, Literature and Arts. New Series, I, 175—183, London 1828. Einen von Wilhelm Weber herrührenden deutschen Auszug aus derselben Abhandlung findet man in Schweiggers Journal für Chemie und Physik, Bd. 53 (= Bd. 23 des Jahrbuchs der Chemie und Physik), S. 327—333, Halle 1828.

2. О началахъ геометріи (Ueber die Anfangsgründe der Geometrie).

K. B. Theil 25: Februar und März 1829, S. 178—187; April 1829, S. 228—241.

K. B. Theil 27: November und December 1829, S. 227—243 (Tafel I, Fig. 1—9).

K. B. Theil 28: März und April 1830, S. 251—283 (Tafel II, Fig. 10—17); Juli und August 1830, S. 571—636.

Wieder abgedruckt in den G. A. I, S. 1—67; ins Deutsche übersetzt hier S. 1—66. Vgl. auch S. 371, 392—394, 408.

3. Рѣчь о важнѣйшихъ предметахъ воспитанія (Rede über die wichtigsten Gegenstände der Erziehung). Geh. am 5. (17.) Juli 1828.

K. B. Theil 35: August 1832, S. 577—596. Vgl. hier S. 388, 430.

4. Алгебра или вычисленіе конечныхъ (Algebra oder die Rechnung mit endlichen Grössen).

Selbständiges Werk, Kasan 1834, X und 528 S. 8⁰. Die Druckerlaubniss der Censur ist von 1832. Vgl. hier S. 370, 411.

5. Пониженіе степени въ двучленномъ уравненіи, когда показатель безъ единицы дѣлится на 8 (Erniedrigung des Grades einer zweigliedrigen Gleichung, wenn der um eins verminderte Grad durch acht theilbar ist).

K. G. S. 1834, I, S. 3—32; vgl. hier S. 412.

6. Объ изчезаніи тригонометрическихъ строкъ (Ueber die Konvergenz der trigonometrischen Reihen).

K. G. S. 1834, II, S. 167—226; vgl. hier S. 412—415.

7. Условныя уравненія для движенія и положенія главныхъ осей обращенія въ твердой системѣ (Die Bedingungsgleichungen für die Bewegung und die Lage der Hauptdrehungsaxen eines starren Systems).

Gelehrte Schriften der Moskauer Universität, Februar 1835, Nr. VIII, S. 169—190.

8. Воображаемая геометрія (Imaginäre Geometrie).

K. G. S. 1835, I, S. 3—83, Tafel mit Fig. 1—8; wiederabgedruckt in den G. A. I, S. 71—120. Russische Bearbeitung von Nr. 12; vgl. hier S. 395.

9. Способъ увѣряться въ изчезаніи безконечныхъ строкъ и приближаться къ значенію функцій отъ весьма большихъ чиселъ (Ein Verfahren um sich von der Konvergenz unendlicher Reihen zu überzeugen und sich dem Werthe von Funktionen sehr grosser Zahlen anzunähern).

K. G. S. 1835, II, S. 211—342; vgl. hier S. 415—417.

10. Новыя начала геометріи съ полной теоріей параллельныхъ (Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallellinien).

K. G. S. 1835, III, S. 3—48, Einleitung und Kapitel I, 1 Tafel: Fig. 1—20.

K. G. S. 1836, II, S. 3—98, Kapitel II, III, IV, V, 3 Tafeln: Fig. 21—41, 42—60, 61—75.

K. G. S. 1836, III, S. 3—50, Kapitel VI, VII, 2 Tafeln: Fig. 76—91, 92—106.

K. G. S. 1837, I, S. 3—97, Kapitel VIII, IX, X, XI, 2 Tafeln: Fig. 107—120, 121—134.

K. G. S. 1838, I, S. 3—124, Kapitel XII.

K. G. S. 1838, III, S. 3—65, Kapitel XIII.

Wiederabgedruckt in den G. A. I, S. 219—486; Einleitung und Kapitel I—XI in deutscher Uebersetzung hier S. 67—235; Ueber Kapitel XII und XIII vgl. S. 236 und 410 f. Vgl. auch S. 395—397.

11. Примѣненіе воображаемой геометріи къ нѣкоторымъ интеграламъ (Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale).

K. G. S. 1836, I, S. 3—166, 1 Tafel: Fig. 1—20.

Wiederabgedruckt in der G. A. I, S. 121—218. Vgl. hier S. 395, 409 f.

12. Géométrie imaginaire (Par Mr. N. Lobatschewsky, recteur de l'Université de Cazan).

Crellesches Journal Bd. 17, Heft 4, S. 295—320, 1 Tafel: Fig. 1—8. Berlin 1837.

Wiederabgedruckt in den G. A. II, S. 581—613. Geschrieben vor Nr. 8 und schon 1834 oder 1835 nach Berlin geschickt; vgl. S. 397.

13. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien von Nicolaus Lobatschewsky, kaiserl. russ. wirkl. Staatsrathe und ord. Prof. der Mathematik bei der Universität Kasan.

Selbständiges Werk: Berlin 1840. In der F. Fincke'schen Buchhandlung. (Weidle'sche Buchdruckerei.) 61 S. Kleinoktav, 2 Tafeln: Fig. 1—15, 16—35. Ladenpreis ½ Rℓ. Vgl. S. 397 f., 433 f.

Wiederabgedruckt in den G. A. II, S. 553—578. In Faksimiledruck von Neuem herausgegeben von Mayer und Müller, Berlin 1887. Ueber die französische und die englische Uebersetzung vgl. S. 421, 445.

14. Ueber die Convergenz der unendlichen Reihen.

Erschienen als Beilage zu dem Grossquarthefte: „Meteorologische Beobachtungen aus dem Lehrbezirk der Kaiserlich Russischen Universität Kasan. Auf Kosten der Universität herausgegeben von Ernest Knorr. Heft I, 1835—36. Kasan in der Universitäts-Buchdruckerei. 1841." Die besonders paginirte Beilage enthält auf S. 1—48 die Arbeit Lobatschefskijs und auf S. 49—61 einen „Kasan im März 1838" datirten Aufsatz von E. Knorr: „Allgemeine Bemerkungen über den Vortrag der Physik auf Gymnasien." Vgl. hier S. 399 f.

15. Sur la probabilité des résultats moyens, tirés des observations répétées (Par Mr. Lobatschefsky, recteur de l'université de Cazan).

Crellesches Journal Bd. 24, Heft 2, S. 164—170, Berlin 1842. Grösstentheils eine Uebersetzung einiger Seiten aus dem Kapitel XII der „Neuen Anfangsgründe", vgl. K. G. S. 1838, I, S. 87—105; G. A. I, S. 428—438; vgl. auch hier S. 401 und 410.

16. Полное затмѣніе солнца въ Пензѣ 26. іюня 1842 г. (Die totale Sonnenfinsterniss in Pensa, am 26. Juni [8. Juli] 1842).

K. G. S. 1842, III, S. 51—83, auch abgedruckt im Журналъ Министерства Народнаго Просвѣщенія (Journal des Ministeriums für Volksbildung) 1843, Bd. XXXIX, Abth. II, S. 65—96.

17. Подробный разборъ разсужденія представленнаго магистромъ А. Ѳ. Поповымъ подъ названіемъ: „Объ интегрированіи дифференціалныхъ уравненій гидродинамики, приведенныхъ къ линейному виду" на степень доктора математики и астрономіи (Ausführliche Analyse der von dem Magister A. F. Popof zur Erlangung des Doktorgrades in der Mathematik und Astronomie vorgelegten Dissertation, betitelt: „Ueber die Integration der Differentialgleichungen der Hydrodynamik, wenn diese auf lineare Form gebracht sind").

Gedruckt als Anhang zu der Doktordissertation Popofs, Kasan 1845, 4°, 13 besonders paginirte Seiten; datirt vom 11. (23.) April 1845. Vgl. hier S. 401.

18. Значеніе нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ (Der Werth einiger bestimmter Integrale).

K. G. S. 1852, IV in 4^0, und zwar: Abhandlung I, S. 1—26, Abhandlung II, S. 27—34. Dieselbe Arbeit ist auch in deutscher Sprache erschienen in dem von Georg Adolph Erman herausgegebenen „Archiv für wissenschaftliche Kunde von Russland", Berlin 1855, Bd. 14, S. 232—272, unter dem Titel: „Ueber den Werth einiger bestimmten Integrale. Nach dem Russischen von Herrn Lobatschefskji, Prof. emerit. in Kasan." Die Uebersetzung rührt nicht von Lobatschefskij her. Vgl. hier S. 418.

19. Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles, par N. Lobatscheffsky, Professeur émérite de l'université de Kasan et membre honoraire de l'université de Moscou.

Сборникъ ученыхъ статей, написанныхъ профессорами Императорскаго Казанскаго Университета, въ память пятидесятилѣтняго его существованія (Sammlung gelehrter Abhandlungen, verfasst von Professoren der Kaiserlichen Universität Kasan zur Erinnerung an deren fünfzigjähriges Bestehen), Bd. I, Kasan 1856, S. 279—340. Wiederabgedruckt in den G. A. II, S. 617—680. Vgl. hier S. 403 und 411, wegen der italienischen Uebersetzung vgl. S. 421, 445.

20. Пангеометрія, заслуженаго Профессора Н. И. Лобачевскаго (Pangeometrie, von dem emeritirten Professor N. J. Lobatschefskij).

K. G. S. 1855, I, in 4^0, S. 1—56; Kasan, in der Universitätsbuchdruckerei, 1856; unveränderte Uebertragung von Nr. 19. Wiederabgedruckt in den G. A. I, S. 489—550.

Die geometrischen Arbeiten Lobatschefskijs sind vereinigt in dem Werke:

Полное собраніе сочиненій по геометріи Н. И. Лобачевскаго. Изданіе Императорскаго Казанскаго Университета (Vollständige Sammlung der geometrischen Arbeiten N. J. Lobatschefskijs. Ausgabe der Kaiserlichen Universität Kasan).

Theil I, Kasan 1883, in 4^0, S. I—VIII und 1—550 enthält die vorstehenden Nrn. 2, 8, 11, 10 und 20.

Theil II, Kasan 1886, in 4^0, S. 3—8 und 551—680, mit einem Bildnisse und russischen Faksimile Lobatschefskijs, trägt auch die Bezeichnung: Collection complète des oeuvres géométriques de N. J. Lobatcheffsky. Édition de l'Université Impériale de Kasan, und enthält die vorstehenden Nrn. 13, 12 und 19.

d. p. 456.

Berichtigungen und Nachträge.

S. 6, Z. 1 v. u., 7, Z. 1 v. o. setze man nach „berühren“ ein Komma.

S. 20, Z. 18 v. u. hätte (11) in (12) umgeändert werden sollen.

S. 25, Z. 10. Die [*257* gehört an die Zeile 12.

S. 34, Z. 10: s. S. 265 Z. 21—17 v. u.

S. 36, Z. 2 lies: [gleiche].

S. 42, Z. 10 v. u.: s. S. 278 Z. 7—11.

S. 57, Z. 11. Die [*602* gehört an die Zeile 13.

S. 73, Z. 17 v. o.—8 v. u. In seinen Réflexions sur la théorie des parallèles (vgl. S. 311, Z. 18—15 v. u.) giebt Legendre auf S. 397—399 eine etwas abgeänderte Dartellung des hier auf S. 71—73 kritisirten Beweises, den Louis Bertrand in Bd. II, S. 19 f. seines Werkes: Développement nouveau de la partie élémentaire des mathematiques, prise dans toute son étendue, Genf 1778, veröffentlicht hat. Sodann folgt auf S. 399 f. der Reflexions der hier S. 73, Z. 18 v. o.—8 v. u. wiedergegebene Beweis, und Legendre schliesst mit den Worten: „On ne peut disputer à ces démonstrations le mérite d'être simples et rigoureuses. M. Bertrand, de Genève, est le premier qui en ait fait mention dans son ouvrage intitulé: Développement de la partie élémentaire des mathématiques: mais jusqu'à présent*) personne ne les a introduites dans les livres élémentaires.“

Hierdurch wird der Anschein erweckt, als ob auch der zweite Beweisversuch von Bertrand herrühre. Lobatschefskij, der jedenfalls das Bertrandsche Werk nicht zu Gesicht bekommen hat, war offenbar dieser Meinung, und ich selbst habe erst jetzt nach Einsicht jenes Werkes bemerkt, dass sich der zweite Beweisversuch nicht darin findet. Es müsste daher auf S. 73, Z. 17 f. eigentlich heissen: „Ein andres Ansehen giebt Legendre dem Bertrandschen Beweise, indem er unendliche Flächenräume in Winkeln allein betrachtet.“ Ebenso sollte auf S. 75, Z. 18 v. u. gesagt werden: „in dem von Legendre umgestalteten Bertrandschen Beweise“, auch müssen die von mir zu diesen Stellen gemachten Anmerkungen auf S. 315 und 317 geändert werden, s. S. 451—453. Allerdings wäre es möglich, dass der zweite Beweisversuch in Bertrands Elémens de Géometrie, Paris 1812 (P. Th. S. 305) enthalten wäre, aber dieses Buch haben weder Stäckel noch ich bis jetzt einsehen können.

S. 74, Fig. 5. Auf der Verlängerung von AB soll B' stehen, nicht B''.

---

*) Das ist unrichtig, denn das Beweisverfahren findet sich schon 1803 bei Ide und bei Lacroix (P. Th. S. 305, 306), ferner auch in den Elémens de Géométrie von Develey, Lausanne 1816, die in der P. Th. nicht angeführt sind. Vgl. überdies P. Th. S. 231. Stäckel.

S. 75, Z. 12—6 v. u. Hier ist nicht recht klar, wie Lobatschefskij dazu kommt, gerade das aus den Legendreschen Betrachtungen herauszulesen; Legendre beweist nämlich, dass das unendliche Zweieck $CABD$ gleich ist dem Zweiecke, das begränzt wird von ED, EF und von der auf EF in E nach der Seite von D und C hin errichteten Senkrechten, oder richtiger, er beweist, dass jenes Zweieck in dieses verwandelt werden kann (vgl. S. 317 f.); da aber, wenn AFE ein spitzer Winkel ist, der Winkel EFC stumpf ausfällt, so ist das erste Zweieck keineswegs der Flächenraum, der aus dem Zweiecke $DBAC$ durch Abschneiden des Vierecks $ABEF$ entsteht.

S. 97, Fig. 25. Die Punkte zwischen E und B' sollen G' (nicht G) und F' (nicht F) heissen.

S. 111, Z. 4 und 141, Z. 18 v. u. setze man vor „und“ ein Komma.

S. 189, Z. 13—15. Statt BC lies AB. Der Urtext lautet: Въ такомъ случаѣ содержаніе, хордамъ AC, BC соотвѣтственныхъ угловъ при центрѣ круга, будетъ еще менѣе разниться, нежели дробь $\frac{1}{m}$; . . . . Es fehlt aber eine Angabe darüber, wovon sich dieses Verhältniss um weniger als $\frac{1}{m}$ unterscheidet. Vgl. S. 336, Z. 17—12 v. u.

S. 196, Z. 5 lies: Die beiden Linien a und a'.

S. 302, Z. 3—16, 305, Z. 21—6 v. u. Die Mittheilungen über das Legendresche Supplément verdanke ich Stäckel.

S. 313, Z. 9 v. u. lies: 378 statt: 377.

S. 315, Z. 24, 22 und 21 v. u. lies: „seinen Beweisversuch“, „1778“ statt „1774“, „diesen Beweisversuch“ und: „Der Versuch beruht“.

S. 315, Z. 9, 8 v. u. sind die Worte: „Den zweiten . . .“ zu tilgen.

S. 315, Z. 22—9 v. u. Wie ich mich jetzt überzeugt habe, ist der Bericht Legendres nicht ganz treu. Bertrand braucht 1778 weder das Wort biangle noch die Ausdrücke: unendlich gross von erster oder zweiter Ordnung. Es ist wohl das Beste, den Wortlaut des Bertrandschen Beweises wiederzugeben (Développement nouveau, Bd. II, S. 19 f.). Die Figuren kann sich der Leser selbst leicht zeichnen.

„**Proposition VIII.** Deux droites AB, CD, qui font sur une troisieme GH des angles intérieurs BKL, DLK égaux ensemble à deux droits, remferment entr'elles une portion du plan telle qu'il en contient une infinité de pareilles.

„En effet, puisque par supposition, la somme des angles BKL, DLK est égale à deux angles droits; que d'ailleurs, la somme des angles de suite DLK, DLM est aussi égale à deux angles droits; il s'ensuit que $DLM = BKL$: que par conséquent, si l'on prend sur HG la longueur $LM = KL$, et qu'imaginant la droite EF tirée par le point M de manière que $FML = DLK$, on fasse glisser la bande $ACDB$, le long de HG, jusqu'à ce que le point L vienne en M et le point K en L, la ligne KL coïncidera avec LM, la ligne LD avec MF, et la ligne KB avec LD; parce que les angles égaux, de même que les droites égales, peuvent convenir. Mais la bande $ACDB$ convenant ainsi avec la bande $CEFD$, à cause qu'on a pu prendre sur HG une longueur $LM = KL$, il est clair qu'on feroit autant de bandes égales à $ACDB$ qu'on pourroit prendre sur HG de longueurs égales à KL, c'est-à-dire, qu'on en feroit une infinité; et partant, que deux droites, qui font sur une troisieme des angles intérieurs égaux à deux droits, renferment entr'elles une portion du plan telle qu'il en contient une infinité de pareilles.

„**Proposition IX.** Lorsque deux droites font sur une troisieme des angles intérieurs dont la somme n'est pas égale à deux droits, ces droites se rencontrent.

„Rappellons-nous dabord la remarque qui a été faite plus haut, que si deux droites AB, CD font, d'un côté d'une troisieme KL, des angles intérieurs BKL, DLK dont la somme surpasse deux angles droits, ces mêmes droites font, de l'autre côté de KL, des angles intérieurs AKL, CLK dont la somme est moindre que deux droits: Puis supposé qu'ici $AKL + CLK < 2$ droits, et que LM fasse l'angle CLM du nombre de degrés, minutes, secondes etc. qui manquent à $AKL + CLK$ pour faire deux angles droits; l'on ne pourra nier, que par la proposition précédente, le plan ne contienne une infinité de bandes pareilles à $MLKA$: que par conséquent, si LC ne rencontroit pas KA du côté de A, il ne s'ensuivit cette absurdité, que $MLKA$ renfermeroit l'angle MLC, duquel, loin de pouvoir dire que le plan en contient une infinité de semblables, on peut dire au contraire qu'il n'en contient qu'un nombre fini, savoir 360, si c'est un degré; 21600, si c'est une minute; 1296000, si c'est une seconde etc. Donc il est impossible que LC ne rencontre pas KA du côté de A: Donc en général, il est impossible que deux droites ne se rencontrent pas lorsque la somme des angles intérieurs qu'elles font sur une troisieme n'est pas égale à deux angles droits.

„Pour faire encor mieux sentir la force de cette démonstration j'observerai, qu'un angle petit ou grand, placé au centre d'un cercle décrit avec un rayon fini quelconque, insiste sur un arc de quelque grandeur ou sur un arc de nulle grandeur: que s'il insiste sur un arc de nulle grandeur, il faut que ses jambes coïncident, et conséquemment que ce ne soit pas un angle: que s'il insiste sur un arc de quelque grandeur; comme toute la circonférence est elle-même une grandeur finie; il faut que le rapport de cet arc à toute la circonférence soit un rapport de quantité finie à quantité finie: que par conséquent, l'angle qui insiste sur cet arc soit aussi à toute la quantité angulaire autour du centre, comme une grandeur finie à une autre; parce qu'enfin les angles au centre sont à toute la quantité angulaire autour du centre, comme les arcs sur lesquels ils insistent sont à toute la circonférence. Mais une portion de plan contenue entre deux droites qui font sur une troisieme des angles intérieurs égaux à deux droits n'est pas à toute la surface plane comme une quantité finie est à une autre quantité finie, mais comme une quantité finie à une quantité infinie: La bande $ACDB$ par exemple*) est à tout le plan dont elle fait partie, comme la droite finie KL est à la droite infinie KG: Donc un angle, quelque petit qu'il soit, est toujours plus grand qu'une de ces parties du plan que nous avons qualifiées de bandes: Donc il implique contradiction qu'une bande contienne un angle: Donc il implique contradiction que deux droites qui font sur une troisieme des angles intérieurs dont la somme n'est pas égale à deux droits ne se rencontrent pas, du côté où cette somme est moindre que deux droits.“

Sonst habe ich in dem Bertrandschen Werke keine Stelle weiter finden können, an der die hier behandelte Frage gestreift wäre: nur in der Vorrede wird wenigstens darauf angespielt, es heisst da (Bd. I, S. XXI): „Donc l'attachement scrupuleux à la rigueur géométrique conduit à la clarté et à la netteté, et réciproquement la netteté mene à la rigueur géométrique. C'est à la recherche, c'est

*) Gemeint ist die in Proposition VIII betrachtete.

à l'ambition de cette netteté que je dois par exemple, les définitions de l'angle et de la ligne droite qui m'ont fait éviter le défaut connu des Eléments d'Euclide sur la rencontre des paralleles. Défaut qui ne vient que de ce qu'il n'a défini ni l'angle ni la ligne droite; car on ne qualifiera pas de définition une dénomination différente de la dénomination ordinaire d'un objet."

Den Winkel definirt Bertrand übrigens in Bd. II auf S. 7 so: „Un angle est une portion de superficie plane contenue entre deux lignes droites, qui se coupent, et sont terminées à leur point de section." Seine Erklärung der Geraden ist dagegen für uns nicht von Belang.

S. 317, Z. 11, vgl. S. 450, Z. 12—6 v. u.

S. 321, Z. 1 ff. Auch Steiner hat sich mit diesem Orte beschäftigt, jedoch ohne dessen einfache Definition zu bemerken, wie sie Lobatschefskij gegeben hat; s. die Abhandlung: „Verwandlung und Theilung sphärischer Figuren durch Construction", Crelles Journal Bd. 2, S. 45—63 (1827), Werke Bd. I, S. 101—120.

S. 326, Z. 18—9 v. u. Zu derselben Beziehung zwischen zwei rechtwinkligen sphärischen Dreiecken ist schon Gauss bei Untersuchungen über das Pentagramma mirificum gelangt, vgl. die Ges. Werke III, S. 487—490, und Dziobek, Ueber eine Erweiterung des Gauss'schen Pentagramma mirificum auf ein beliebiges sphärisches Dreieck, Grunerts Archiv II. Reihe, Bd. 16 (1898), S. 320—326. Vol. VIII (19[illegible]) pp. 106–117

S. 335, Z. 1. In seinem Exemplare der G. U. (vgl. S. 434 f.) hat Gauss zu den Worten „welcher vergrössert wurde" die Randbemerkung gemacht: „was wohl näher nachgewiesen zu werden verdient hätte." In der That ist man nur dann sicher, dass $\angle CBQ$ grösser ist als $\angle CBA$, wenn $AC > BC$. Sollte dagegen $AC < BC$ sein, so mache man $\angle ACQ = \Pi(a) + \Pi(b)$ und $CQ = CB$ und kann dann wieder die Lobatschefskijsche Schlussweise anwenden. Der Fall $AC = BC$ endlich braucht wohl nicht noch besonders behandelt zu werden.

S. 338, Z. 9, 8 v. u. Man vgl. hierzu S. 424 Z. 23—11 v. u.

S. 362, Z. 15—19. Es sind drei verschiedene Hefte über Geometrie, die mit Nachschriften von Vorlesungen über Algebra so zusammengebunden sind, dass Algebra und Geometrie abwechseln. Die geometrischen Hefte enthalten keine Angaben über die Zeit der Niederschrift; eines trägt die Bezeichnung: Heft über Geometrie des Schülers Temnikof. Auf den algebraischen Heften steht geschrieben: Vorlesungen von 1815 bis 1816 und: Vorlesungen von 1816 bis 1817. Daher stammt die Zeitangabe des Textes.

S. 362, Z. 17 v. u. Vgl. auch den Beweisversuch von E. Knorr, S. 440 f.

S. 369, Z. 7 v. u. Vgl. auch S. 450—453.

S. 377, Z. 17—20. In einem Briefe an Gauss, vom 10. Februar 1829, erwähnt Bessel, er sei durch das, was Lambert gesagt habe, und durch Schweikarts mündliche Aeusserungen zur Klarheit über die Parallelenfrage gekommen (s. P. Th. S. 227). Es ist etwas auffallend, dass Gauss in seiner Antwort auf diese Bemerkungen Bessels gar nicht eingeht; da er über Schweikart Bescheid wusste, möchte man hieraus fast schliessen, dass auch der Hinweis auf Lambert für ihn nichts Neues enthielt. Gauss kann auf die Arbeit von Lambert durch den 1824 erschienenen Euklidkommentar von Camerer aufmerksam geworden sein, vgl. P. Th. S. 248 und 319.

S. 381, Z. 20—25. Zu dieser Auffassung sind Stäckel und ich auf Grund des jetzt vorliegenden Materials gelangt. Die Mittheilungen, die Gauss selbst 1799 (s. S. 379) und in späterer Zeit über die Anfänge seiner Untersuchungen gemacht hat, sind damit durchaus vereinbar.

An Taurinus schreibt er 1824 (s. P. Th. S. 249), er habe sich seit über dreissig Jahren mit der Annahme beschäftigt, dass die Winkelsumme im Dreiecke kleiner sei als zwei Rechte. In einem Briefe an Bessel von 1829 (P. Th. S. 226) spricht er davon, dass das Thema der ersten Gründe der Geometrie bei ihm schon fast vierzig Jahre alt sei. Im Jahre 1831 schreibt er an Schumacher (s. P. Th. S. 230), dass seine Meditationen über die Parallelentheorie zum Theil schon gegen vierzig Jahre alt seien, und seinem Jugendfreunde W. Bolyai gegenüber äussert er 1832: „der ganze Inhalt der Schrift*), der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Theil schon seit 30—35 Jahren angestellten Meditationen überein" (s. Math. Ann. Bd. 49, S. 162 und Briefwechsel zwischen Gauss und W. Bolyai S. 109).

Aus allen diesen Angaben geht aber nur hervor, dass Gauss bereits vor 1808 sehr eingehend untersucht hatte, welche Folgen sich aus der Annahme ergeben, die Winkelsumme sei kleiner als zwei Rechte, ähnlich wie Saccheri aus seiner Hypothese des spitzen Winkels ein ganzes System von Folgerungen und Sätzen abgeleitet hatte und wie es Lambert bei seiner dritten Hypothese gethan hatte (vgl. P. Th. S. 50—135, 192—207). Dagegen lässt sich aus den angeführten Briefstellen gar nichts darüber schliessen, wann Gauss sich ganz von den Fesseln Euklids befreit und sich zur vollen Ueberzeugung von der Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms durchgerungen hat. Aus den im Texte angeführten Gründen scheint das jedenfalls nicht vor 1808 gewesen zu sein.

S. 380, Z. 17—13 v. u. Die wichtigsten Stellen aus diesem Briefe Wachters sollen in Bd. VIII der Gaussischen Werke veröffentlicht werden. Stäckel.

S. 381, Z. 7 f. statt: „und 16" lies: „bis 1817"; vgl. S. 453, Z. 22—16 v. u.

S. 381, Z. 3, 2 v. u. Der Einfluss Legendres hätte hier stärker betont werden sollen; verrathen doch schon die geometrischen Vorlesungen, die Lobatschefkij 1815—1817 gehalten hat (s. S. 362 f.) ein eingehendes Studium der Legendreschen Untersuchungen. Auch hätte darauf verwiesen werden sollen, dass Lobatschefskij später, in der Einleitung zu seinen „Neuen Anfangsgründen" (hier S. 68—76), sich sehr ausführlich mit Legendre auseinandergesetzt hat.

S. 382, Z. 16 v. u. — 383, Z. 2. Der Leser könnte hier den Eindruck gewinnen, als ob ich Schweikart überschätzte, da ich ihn mit Gauss, Lobatschefskij und J. Bolyai in eine Linie stelle. Er bedenke jedoch, dass es sich bei dieser Gelegenheit nicht darum handelt, was die genannten vier Männer für die Ausbildung der nichteuklidischen Geometrie geleistet haben, sondern nur um das gewiss nicht gering zu schätzende Verdienst, den Bruch mit der zweitausendjährigen Autorität Euklids vollzogen und die Möglichkeit und Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Geometrie klar erkannt zu haben. In dieser Beziehung sind alle vier entschieden als gleichberechtigt zu betrachten, während allerdings Schweikart, so viel wir wissen, für die eigentliche Ausbildung der neuen Geometrie wenig geleistet hat und demnach insofern mit den drei andern überhaupt nicht verglichen werden kann. Dagegen können die Untersuchungen seines Neffen Taurinus auch neben denen von Gauss, Lobatschefskij und J. Bolyai mit Ehren genannt werden.

S. 397, Z. 17 statt: „Ueber die" lies: „Die".

S. 420, Z. 5—9. Dass sich Gauss sehr früh mit Parallelentheorie beschäftigt

*) nämlich des Appendix von J. Bolyai.

und eine anti-euklidische Geometrie entwickelt hatte, war allerdings schon durch die 1856 erschienene Schrift: „Gauss zum Gedächtniss“ von Sartorius von Waltershausen bekannt geworden, aber der Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher brachte doch zum ersten Male Mittheilungen darüber aus Gaussens eigner Feder, und zwar aus dem Jahre 1831, während Sartorius auf Grund viel späterer mündlicher Aeusserungen von Gauss berichtet hatte. Vgl. P. Th. S. 216.

S. 438, Z. 5 f., nämlich in der zweiten Hälfte der zwanziger Jahre.

S. 438, Z. 9 f. Herr Professor Brendel in Göttingen, der derzeitige Verwalter des Gaussarchivs, hat auf meine Bitte den Briefwechsel zwischen Gauss und Encke daraufhin durchgesehen, ob der Name Knorr noch an andern Stellen vorkommt, hat jedoch den Namen weder in diesem noch auch sonst in einem andern Briefwechsel finden können, abgesehen von dem uns bekannten Briefe an Encke vom 1. Februar 1841. Dagegen hat er festgestellt, dass in der Gaussischen Bibliothek zwei Abhandlungen von Knorr, Physiker in Kasan, vorhanden sind, nämlich (vgl. S. 439): „Bestimmung der Höhe von Kasan“ und „Bericht über eine wissenschaftliche Reise 1836“ (Inspektion der meteorologischen Stationen an der Wolga). Daraus geht hervor, dass E. Knorr wirklich zu Gauss Beziehungen gehabt hat, und Stäckels Vermuthung erhält eine neue Stütze.

S. 441, Z. 21 ff. Zur Vervollständigung führe ich noch die nachstehenden Arbeiten Bunjakofskijs an: „Nouvelle théorie des parallèles“, lu le 12. dec. 1847, Bulletin de l'Ac. Imp. de St. Pétersb. V, 1847, Spalte 81—85, ein Auszug aus der 1850 in den Mémoires erschienenen Abhandlung. Ferner: „Note sur la théorie des parallèles et sur d'autres points fondamentaux de la géométrie élémentaire“, lu le 16. août 1850, Bull. IX, 1851, Sp. 49—59. „Nouvelles considérations sur la théorie des parallèles“, lu le 22. août 1862, Bull. V, 1863, Sp. 387—393. Endlich: „Considérations sur quelques singularités qui se présentent dans les constructions de la Géométrie non-euclidienne“, lu le 4. avril 1872, Mémoires, VII série, tome 18, no. 7. Petersburg 1872, 16 S. 4°.

Lobatschefskij wird nur in der letzten dieser Arbeiten erwähnt, und zwar sehr anerkennend. Aber auch hier ist Bunjakofskij immer noch Anhänger der Euklidischen Geometrie und sucht diese zu retten.

S. 442, Z. 15—11 v. u. Wassiljef hat mich nachträglich noch auf eine von Ueberweg herrührende Besprechung des Buches aufmerksam gemacht. Diese steht in der Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, herausgeg. von Fichte, Ulrici und Wirth, Neue Folge, Bd. 37, Halle 1860, S. 148—167. Auf S. 164 f. heisst es da:

„Es ist ferner dem Mathematiker wichtig, zu wissen, wie viel aus einer bestimmten Zahl von Axiomen ohne die übrigen folge, insbesondre, was ohne das eilfte Axiom des Euklid, und was nur mit Hülfe von diesem sich feststellen lasse. Auf diese Frage antwortet in gewissem Masse schon Euklid selbst durch die Anordnung seiner Sätze. . . . Eine vollständigere Antwort gibt die 'Géométrie imaginaire', welche Lobatschewski aufgestellt, und deren Grundgedanken auch schon Gauss, obschon vielleicht nur mündlich, ausgesprochen hat, eine hypothetische Geometrie, die mit Hülfe der analytischen Rechnung auf Grund der Gültigkeit der früheren Axiome, aber zugleich der Ungültigkeit des eilften, also der Gültigkeit seines contradictorischen Gegentheils, entworfen wird und eine Reihe von Sätzen enthält, welche untereinander widerspruchlos zusammenstimmen, aber der Wirklichkeit nicht entsprechen.“

S 442, Z. 11 v. u., 443, Z. 14 lies: Liége.

S. 442, Z. 3 v. u. Diese Zeitschrift erschien in Leipzig als Supplement zu den „Neuen Jahrbüchern für Philologie und Pädagogik". Die Ueberwegsche Arbeit steht auf S. 20—56.

S. 446, Z. 7 v. u. Das Jahr des Erscheinens der Algebra ist auf S. 318, Z. 20, 370, Z. 9 v. u., 397, Z. 14 unrichtig angegeben. Das Citat auf S. 205, Z. 10 v. u. bezieht sich selbstverständlich auch auf dieses Buch.

S. 446—449. Erwähnt sei hier ein mathematisches Schriftchen, das von einem andern Lobatschefskij verfasst und 1833 in Petersburg erschienen ist:

Programma geometricum. Continens clavem quadraturae lunularum inaequalium (3 : 4), (1 : 4) et segmenti 60 graduum. Auctore Ioanne Lobatschevsky.

Der Verfasser war, wie er sagt: Adjunctus Praefecti Bibliothecae Imperatoriae medicochirurchicae Academiae Petropolitanae. Ein Exemplar des Schriftchens besitzt die Bibliothek der Kais. Sternwarte zu Pulkowo. (Nach einer durch Vermittelung von N. Sonin in Petersburg erhaltenen Mittheilung von Fräulein M. Shilowa in Pulkowo.)

Sachregister

zur Uebersetzung und zu den Anmerkungen.

Seitenzahlen, die sich auf die Anmerkungen beziehen, sind mit einem * versehen.

Abschnitt einer Kugelfläche (Kugelkalotte) 109.

Abstand zweier Punkte 5 f., 93, ihr kürzester A. 125. Auf der Kugelfläche: A. zweier P. 129, kürzester A. 149; kleinster A. eines Punktes von einem Kreise 129, 149, bestimmt zugleich einen gewissen kleinsten Winkel 150.

Abstandslinie erwähnt 34, *265.

Achtflach (regelmässiges) 142 f.

Aehnliche Dreiecke auf der Gränzfläche und in der gewöhnl. Geom. 195, Sätze darüber 195 f., ähnl. Vielecke 196.

Aeussere Winkel des geradlinigen Dreiecks 118.

Allgemeine (imaginäre) Geometrie 176.

Analyse als Methode der Math. 80 f.

Ausdehnung 85, die drei A. eines Körpers 4.

Ausfüllen, einen Ort 3, 84.

Ausschnitt einer Kugelfläche (sphärisches Zweieck) 109, 135.

Aussenwinkel des geradlinigen Dreiecks 118, ist grösser als jeder der zwei innern, ihm nicht anliegenden W. 123 f., ist mindestens gleich der Summe dieser zwei W. 162; Satz vom A. beim sphär. Dreieck 147.

Axe eines regelmässigen körp. Winkels 139; Axen einer Gränzlinie 29, 185, einer Gränzfläche 12, 191.

Berührung als charakterist. Eigensch. der geom. Körper 2 f., 83 f.; flächenhafte, linienhafte, punkthafte B. 4, 88 f.; B. zweier Kugelfl. in einem Punkte 106 f.; B. zweier Kreise 108; B. zwischen ger. Linie und Kreis 120 f.

Bogenelement einer Kurve in rechtw. Koord. 31, Gl. (34), in Polarkoord. 33, Gl. (37), s. auch *265.

Centriwinkel im Innern eines regelm. Körpers 141.

Divergenz, Seite der D. bei parall. Geraden 181.

Divergirende (= nicht schneidende) Gerade 165.

Dodekaeder (regelm.) 9, 142 f.

Dreieck. Sätze über geradl. u. sphär. Dr. 8 f.; Kongruenz solcher Dr. 10; Gleich. für das rechtw. geradl. D. ausgedr. mit Hülfe der Fkt. $F(x)$ allein 15—18, *239 f., ausgedr. durch die trigon. Fkt. und durch $F(x)$ 20, Gl. (13); Ableitung dieser Gl. aus jenen *246 f. Zu jedem rechtw. geradl. D. gehört ein rechtw. sphär. und umgek., sowie ein neues geradl. 18 f., *240—242. Gl. für bel. geradl. D. 21, Gl. (17), Gl. für sphär. D. 21, Gl. (15) u. (16). Ableit. der Gl. für das rechtw. sphär. D. aus den für das geradl. *247. Für D. mit sehr kleinen Seiten gilt die Eukl. Geom. 21 f. (s. Winkelsumme, Flächeninhalt, flächengleich, Gränzkreis).

Dreieck. I. Das geradlinige. Begriff 109, hat nur einen rechten oder stumpfen W. 119 f. Der gröss. Seite liegt der gr. W. gegenüber u. umgek. 124; die Summe zweier Seiten ist grösser als die dritte 124; vgl. gleichschenklig, Kongruenzsätze u. Winkelsumme. Die drei Mittelsenkrechten 181—184; die geradl. D. der gew. Geom. lassen sich auffassen als Gränz-

bogendr. auf e. Gränzfläche 193—195; vgl. ähnlich; denkbare Gl. zwischen den Seiten u. W. e. D. 218 f. Gl. für die geradl. D. d. gew. Geom. 202 f., 220. Gl. für die geradl. D. d. imag. Geom., ausgedrückt durch d. Fkt. $\Pi(x)$ allein 207—211, *339 f.; dasselbe für belieb. geradl. D. d. im. G. 209 f. Zu jedem rechtw. geradl. D. d. im. G. gehört ein rechtw. sphär. u. umgek., sowie ein neues geradl. 210 f. Gl. für d. rechtw. geradl. D. d. im. G. ausgedr. durch trig. Fkt. u. durch $\Pi(x)$ 213, 221, *345; Ableit. dieser Gl. aus denen auf S. 207—211: 222 f.; *342; Abl. aller aus drei unter ihnen 221, aus zweien 223; Analogon zu der Neperschen Regel *346 f. Die entspr. Gl. für bel. geradl. D. d. im. G. 223—225, ihre Abl. aus denen auf S. 209 f.: 224, 225 f., *343. Für D. mit unendl. kl. Seiten gelten d. Gl. der gew. Geom. 226 f. Einige Formeln *345—348. Vgl. auch Höhe u. Aussenwinkel.

— — II. Das spärische. Begriff 109. Sind im sph. D. zwei Seiten $= \frac{1}{2}\pi$, so ist die dritte gleich dem gegenüberl. W. 117. Zwei Seiten sind stets $< \pi$, die dritte mit dem gegenüb. W. $< \pi$, $= \pi$, $> \pi$ 118. Vgl. gleichschenklig u. Kongruenzsätze. Die Summe zweier Seiten u. d. Summe der gegenüb. W. 146 f., *324. Der Satz vom Aussenwinkel 147; sph. D. mit mindestens zwei spitzen W. 147, *325. Beziehung zwischen den Kath. e. rechtw. sph. D. 147 f. Bez. zwischen Seit. u. geg. W. beim bel. sph. D. 148. Summe zweier Seiten verglichen mit d. dritten 149. Kath. u. Hyp. beim rechtw. sph. D. 150. Zu jedem sph. D., dessen Seiten $< \pi$ sind, gehört ein andres (das Polardr.) 150—152, *326. Zu jedem rechtw. sphär. D., dessen Kath. $< \frac{1}{2}\pi$ sind, gehört ein andres 151, *326, *327. Denkbare Gl. zwischen d. Seit. u. W. e. sph. D. 218 f. Abl. d. Gl. für d. rechtw. sph. D. aus denen für d. geradl. rechtw. D. d. im. Geom., Allgemeingült. dies. Gl. 227 f., die Nepersche Regel *326 f.; die Gl. für das bel. sph. D. 229—231, Ableit. dieser Gl. unt. Voraussetz. der gew. Geom. 231—235. Zusammenh. zw. d. Gl. d. sph. Geom. mit denen für d. geradl. D. der im. Geom. 65, 235. Vgl. Flächeninhalt u. flächengleich.

Dreiseitiger körperlicher Winkel 117.

Durchmesser eines Kreises 97 f.

Durchmesserebenen einer Gränzfläche 191.

Ebene, Begriff 7, 95; setzt sich ins Unendl. fort u. zerlegt den Raum in zwei Theile 95 f., *319; deckt sich mit sich selbst 96; durch zwei P. kann man e. E. legen 96 f.; Ursprung der erzeug. Kreise auf d. E. 97; Schnitt zwisch. E. u. Kugelfläche 104; Schnitt zweier E. 105; durch drei P. geht e. E. 105 f.; zwei E. durch drei P. fallen zusammen 106; zwei E. durch zwei parall. Ger. schneiden ein. in e. dritten Parall. 169 f.; Ebene, die zu e. Ger. parall. ist 170; drei Ebenen durch drei par. Ger. bilden innere W., deren Summe $= \pi$ 172, *331 f. Schnitt zw. E. u. Gränzfl. 191 f.

Ebenenwinkel 8, 113; seine Unabhäng. von der zur Messung benutzten Kugelfläche 115 f., er ist gleich einem gewissen geradl. W. 116 f.

Ecken geradl. u. sph. Vielecke 109.

Erzeugende Kreise einer Ebene 97.

Erzeugungsmittelpunkte e. Ebene 7, s. Pole.

Figur 108.

Fläche 4 f., 89 f.; Fl., die e. Körper begränzt, ihre inn. u. äuss. Seite 90; Fl., die einand. in e. Linie schneiden 5, 91; Messung d. Fl. 91 f.

Flächenelement der Ebene in rechtw. Koord. 37, Gl. (39), in Polarkoord. 39; Fl. zwischen zwei Par. zur y-Axe 40; Anwendung auf d. Kreis 40 f., *275 f.; Fl. einer krummen Oberfl. in rechtw. Koord. 42, Gl. (44), e. Umdrehungsfl. 45.

Flächengleich. Ort der Spitzen aller fl. geradl. D. mit gemeins. Grdlinie 34, bei sphär. D. 134, *321 f.

Flächenhafte Berührung 4, 88 f.

Flächeninhalt. Geradl. D. d. im. G. mit gleicher Winkelsumme haben gleich. Fl. 35, *266—268; der Fl. ist proport. dem Betrage, d. d. Winkels. an π fehlt 36; Fl. des grundl. rechtwinkl. Dr. durch die Katheten ausgedrückt 36; Uebergang zur gew. Geom. 36; Fl. des rechtw. geradl. Dr., dessen Hyp. der einen Kath. parallel ist 39, *272 f.; Fl. d. geradl. Vierecks 36; vgl. Winkelsumme u. Viereck; Fl. des sph. Dr. stets $< \pi$ 148; dieser Fl. ausgedr. durch die Winkel d. Dr. 133—136, *321 f.; Fl. des sphär. Vielecks mit einf. u. dopp. Begränzung 137 f.; Fl. des sphär. Dr., sobald je zwei Seiten zus. $< \pi$ 153, der Fl. wird durch Verkleinerung zweier S. belieb. klein 154; vgl. Kreis, Gränzkreis.

Flächenräume, Messung v. Fl. 34, 83.

Funktionen, d. Fkt. $F(x)$ oder $\Pi(x)$

als geom. F. (vgl. Parallelwinkel) 11, 175; die trigon. F. 13 f., 197—206; ihre Berechnung 14, 201, 204 f.

Gegenüberliegende Punkte auf einem Kreise 97; g. Pole auf e. Kugelfläche u. bei e. grössten Kreise 99; g. Pole e. Ger. in e. Eb. 108.
Geometrie, Mängel der bisherigen Darstellungen 1 f., 67 f., 79; die beiden mögl. G. 10, 67, 164, 176, 190 f.; die G. auf d. Gränzkugel 12, 193 f.; Verwerthung astron. Messungen, um über die im Raume gültige G. Aufschluss zu gewinnen 22—24, *248—252.
Geometrischer Körper 3, 83.
Gerade Linie und ihre Messung 7 f.; Gleich. der G., die die x-Axe unter geg. Winkel schneidet 25, Gl. (18); Gl. der Parall. zur x-Axe 25, Gl. (19); Gl. einer belieb. G. 27, Gl. (24), (25), *256—258; Länge der G. bestimmt aus der Formel für d. Bogenelem. 32, *264.
Gerade Linie, Begriff 99 f.; g. Linien durch zwei Punkte fallen zusammen 101 f.; G., die nicht zusammenfallen, schneiden ein. höchst. in e. P. 102; Verlängerung der G. 102; die G. als Schnitt zweier Eb. 105; eine G. durch zwei P. e. Eb. liegt ganz in d. Eb. 105; jede G. durch d. Mittelp. eines Kreises halbirt d. Kr. 105; zwei G. durch e. P. liegen in e. Eb. 106; Pole der G. in d. Eb., Seiten der G. 108. Messung der G. 110—112. Zwei G., die auf e. dritten senkr. stehen, schneiden ein. nicht 119; Schnitt zwischen G. u. Kreis 120 f.; Halbirung e. G. 122; die G. als kürzester Abstand 125; G., die zu e. Eb. parallel ist 170; G. durch e. P., die mit e. geg. G. e. belieb. kleinen W. bildet 170. Vgl. parallel u. nichtschneidend, senkrecht.
Geradliniger Winkel 8, 113, ist nicht abhängig von d. Kreishalbm. 113; vgl. Dreieck.
Gewöhnliche Geometrie 10, 67, 164, 176, gilt für unendl. kleine Dreiecke d. im. Geom. 21 f., 77, 226, gilt für Gränzbogendreiecke auf der Gränzfläche 12 f., 193 f.
Gleich s. Körper.
Gleichschenkliges Dreieck 109, I. geradliniges, den gleich. Seit. liegen gl. W. geg. u. umgek., die W. a. d. Grdlin. sind spitz 120; das Loth von d. Spitze nach d. Grdl. halbirt diese u. den W. a. d. Sp. 121 f.
— — II. sphärisches, symmetrische gl. sph. Dr. sind kongr. 129; den gleichen Seit. liegen gl. W. geg. u. umg. 129 f.; die Senkr. von d. Spitze auf d. Grdl. halbirt diese u. den W. an d. Sp. 130; Gl. sph. Dr. mit gemeinsamer Grdl. 130 f.
Gleichseitiges Dreieck 109.
Gränzdreiecke 193.
Gränzfläche (= Gränzkugel, s. d.) 191, *336; Schnitt zwischen Eb. u. Gr. 191, *337; Geom. der Gränzlinien auf e. Gr. 193, *337, vgl. gewöhnliche Geom.
Gränzkreis (= Gränzlinie, s. d.) 12, 78; Gleich. in rechtw. Koord. 27, Gl. (27), *259; Bogen des Gr. ausgedr. durch das von einem Endpunkte auf die Axe des andern gefällte Loth 29, Gl. (29), *260; geradl. Dreieck, dessen Ecken auf e. Gr. liegen 29 f., *260; Bogen des Gr. ausgedr. durch die Tangente in dem einen Endp., die bis zur Axe durch den andern reicht 30, Gl. (30); das Verhältn. zweier Gränzbögen zwischen zwei gemeins. Axen 33, Gl. (36); der Flächenraum zwisch. e. Grbogen u. den Axen durch dessen Endpunkte ist gleich dem Grbogen selbst 39; Fl. zwisch. zwei Grbögen u. den gemeins. Axen durch deren Endp. 39, Formel (39a), *273 f.; Berechnung des Fl. in Polarkoord. 40, *274. Einige Formeln beim Gr. *348.
Gränzkugel (= Gränzfläche), die Geometrie auf ihr 12 f.; Oberfläche der Gr. 43 Z. 12, 46 Z. 8 f.; Rauminhalt eines Grabschnittes 51 Z. 6 v. u.
Gränzlinie (= Gränzkreis, s. d.), Begriff 185 f., *335 f.; sie ist ein Kreis von unendl. grossem Halbm. 78, 186 f.; Vergleichung der Sehnen u. Bögen einer Gr. mit denen eines sie berühr. Kreises 187—189, *336; Verhältniss zweier Grbögen zwisch. gemeins. Axen 189 f. Vgl. Gränzfläche, parallel und senkrecht.
Grösse von Flächen, Linien und Punkten 5, 92.
Grösster Kreis s. Kreis.
Grundfläche e. Pyramide 145.
Grundlinie e. Dreiecks 109.

Halbirung e. Winkels u. e. Geraden 122.
Halbmesser e. Kugelfl. 6, 93; Vergleichung von Hn. 94; H. e. Kreises 7, e. erzeug. Kreises 97 f.; der H. ist d. Hälfte des Durchm. 98.
Hauptschnitte 3 f., 87 f.
Hexaeder 142 f., *323.
Höhe e. geradl. Dreiecks ausgedr. durch d. Winkel 70, *313 f., *348; vgl. gleichschenklig.
Hypotenuse 114; Quadrat d. H. ver-

glichen mit d. Qu. d. Kath. in d. gew. Geom. 177, in d. imag. 179.

Ikosaeder (regelm.) 9, 142 f.
Imaginäre Geometrie 10, 67, 164, 176, angewendet auf unendl. kl. Dreiecke 21 f., 77, 226; ihre Widerspruchsfreiheit 65, ihr Zusammenhang mit der sphär. 65, *308, 235, ihr Nutzen 62—64, 65, die Mechanik in d. im. G. 65 f., *308—310.
Innere Winkel des geradl. Dreiecks 118.
Integrale (bestimmte), Relationen zwischen solchen: 44 f., *278—280; 54—57, *291—296; 61, Gl. (82), (84), (85), *299—301; 62 f., *301 f.; 64, Gl. (88), (89), *304—308.

Kante e. Ebenenwinkels 116; Kanten (Seiten) e. geradl. od. sphär. Vielecks 109.
Katheten 114, vgl. Hypotenuse.
Kegel s. Kreiskegel; Raumelement e. Kegels in rechtw. Koord. 63, Gl. (87), *302 f.
Kegelförmiger Kugelausschnitt 51 Z. 15, *288, *286.
Kegelschale 48, Gl. (54), *284.
Koncentrische Kugelfl. bestimmen Reihenschnitte, die jeden Körper in Theile zerlegen 94.
Kongruent s. Körper, Kugel, Kugelfl., Kreis; kongruente Dreiecke 154.
Kongruenzsätze 10, vgl. *329. I. Bei geradlinigen Dreiecken: zwei Seiten u. der zwischenlieg. W., zwei W. u. d. anlieg. Seite 155; drei Seiten 155 f.; zwei Seit. u. ein gegenüberl. W. 157, *329; bei rechtw. Dr. Hypot. u. eine Kath. 157; eine S. u. zwei W., dabei der gegenüberl. 159; bei rechtw. Dr. eine Kath. (od. die Hypot.) u. ein spitzer W. 155, 159. Wenn die Winkelsumme $< \pi$, die drei Winkel 164 f.
— — II. Bei sphärischen Dreiecken. Symmetr. Dr. werden als kongr. betrachtet 154. Zwei Seit. u. d. zwischenlieg. W., zwei W. u. d. anlieg. Seite 155; d. drei Seiten 156; zwei S. u. ein gegenüberl. W. 158 f.; eine S. u. zwei W. 159 f.; d. drei W. 160; rechtw. Dr. 160.
— — III. Bei Gränzbogendr. u. Dr. d. gew. Geom. 194 f.
Konstruktionen: das Loth, dessen Parallelwinkel ein geg. spitzer W. ist *242 f.; das gemeinsame Loth von zwei nichtschneidenden Geraden *253, *255 f.; durch e. geg. Punkt d. Parall. zu e. geg. Geraden *256; vgl. Loth u. Senkrechte.
Konvergirende (= schneidende) Gerade 165.
Körper, geom. 3, 83; begränzter K. 3; kongr. u. gleiche K. 3, 84; Messung von K. 91; K. mit ebenen Seitenfl. aus dreiseit. Pyram. zusammengesetzt 145 f.; Eulers Polyedersatz 143, 145 f.; vgl. regelmässig.
Körperlicher Winkel 8, 113, 117; seine Grösse 9; dreis. k. W. ausgedr. durch seine Ebenenw. 133—136, *321 f.; Fehler des üblichen Beweises 136, *322; Möglichkeit eines k. Ws. 138.
Kräfte, deren Zusammensetzung in d. imag. Geom. *310.
Kreis 7; Gl. in rechtw. Koord. 27, Gl. (26); Bogenlänge des Kreises auf der Gränzkugel 28, in d. Ebene 29, Formel (28); Ableit. d. Bogenl. aus d. allg. Formel für d. Bogenel. 32, in Polarkoord. 33; Flächeninhalt d. Kr. 37, berechnet aus d. allg. Formel für d. Flächenel. 38, 40 f.
Kreis, Begriff 95; erzeugende Kre. 97; gegenüberlieg. Punkte auf e. Kr. 97; Durchmesser 97 f.; nur ein Mittelp. 98 f.; kongruente Kr. 98; grösste Kr. 99, *319; Kr. als Schnitt von Kugelfl. u. Ebene 104, als Schnitt zweier Kugelfl. 106—108; d. Schnitt zweier Kr. 108; d. Kreis als Fläche od. Linie 109; bei der Messung geradl. Winkel wird d. halbe Kreisumfang gleich π gesetzt 112; d. Schnitt zwischen Kr. u. ger. Linie 120 f.; d. Kr. auf d. Kugelfl. 131 f.; grösste Kr. auf d. Kugelfl. entspr. den Geraden in d. Eb. 132; der Kr. mit unendl. gr. Halbm. ist e. Gerade od. e. Gränzlinie 78, 186; einige Formeln beim Kreise *348. Vgl. Halbmesser.
Kreisabschnitt 109; Flächeninh. des K. 38.
Kreisausschnitt 109; Flächeninh. des K. 38.
Kreisbögen 95, 98; ihre Messung 112; Halbmesser eines Ks. auf d. Kugelfl. 131, auf d. Gränzkugel 28. Vgl. Winkel u. Kreis.
Kreisfläche 109, vgl. Kreis.
Kreiskegel (gerader), seine Mantelfläche 46 Z. 7; Rauminh. d. Ks., dessen Erzeugende zur Axe parall. sind 48, Gl. (53), 62, *301; Rauminh. des Kr. von endl. Höhe 49, Gl. (55), 51 Z. 13, 12 v. u., *285; Uebergang zur gew. Geom. 50.
Kreisumfang 109, vgl. Kreis.
Kreuz, Schnitte u. Theile übers K. 86.
Kugel 6; Rauminh. d. K. 50, Gl. (56), *285 f., 51 Z. 11 f., 52 Z. 3 v. u.—53 Z. 3, *289 f. Vgl. Kugelfläche.

Kugel, Begriff 93; kongruente Kn. 94; die K. wird durch ihre Kugelfl. nicht in Theile zerlegt 95.
Kugelabschnitt 109, seine Oberfl. 43 Z. 9, sein Rauminhalt 51 Z. 14 v. u., 9 v. u.
Kugelausschnitt 109; Rauminh. des K. zwischen zwei zum Durchm. senkr. Ebenen 51, Gl. (58); vgl. kegelförmig.
Kugelfläche 6; Inhalt des Stücks der K. zwischen zwei zum Durchm. senkr. Ebenen 42 Z. 1 v. u., der ganzen K. 43, Gl. (45), *278; Umgestaltung des Integrals für d. Inhalt der K. 43 f., *278–280.
Kugelfläche 93; kongr. K. 94; Schnitt zwischen K. u. Ebene 104 f., zwischen zwei K. 106; Ausschnitt u. Abschnitt der K. 109; bei der Messung körperl. Winkel wird die halbe K. gleich π gesetzt 8, 112.

Linie, Begriff 4 f., 90; e. L. als Schnitt von Flächen 5, 91; L., die sich schliesst u. ihre Seiten 91; Grösse e. L. 92.
Linienhafte Berührung 4, 88 f.
Loth, das gemeins. zweier nichtschneid. Gerad. 26, seine Konstr. *253, *255 f.
Loth (vgl. senkrecht), Begriff 114; von jedem Punkte aus nur ein L. auf e. Gerade 119; Konstr. dieses L. 123; nur ein Loth auf e. Ebene 126, dessen Konstr. 127 f.; das L. auf der Kugelfl. 128, dessen Konstr. 131, wann es $<\frac{1}{2}\pi$ u. wann es $>\frac{1}{2}\pi$ ist 148. In d. gew. Geom. sind d. L. zwischen Parall. gleich 176. In d. im. Geom.: Verhalten der Lothe, die von einer Geraden auf eine andre gefällt sind, wenn die Ger. Schenkel eines spitz. W. sind 178 f., wenn sie auf einer dritten senkr. stehen 179 f., wenn sie parall. sind 180 f.

Mechanik in d. imag. Geom. 66, *308–310.
Messung von Körpern 4, 91, von Flächenräumen 33 f., 83, 91, von krummen Linien 27 f., 82, 92; Principien für d. M. 110, 133.
Mittelpunkt bei Kugelfl. u. Kugel 6, 93, beim Kreis 7; d. Kugel hat nur einen M. 94 f.; M. eines erzeug. Kreises 97; der Kreis hat nur einen M. 98 f.; jede Ger. durch d. M. halbirt d. Kreis 105; M. eines regelm. Vielecks 132, eines regelm. Körpers 140 f.
Mittelsenkrechten, die drei des geradlin. Dreiecks, schneiden einand. in d. gew. Geom. 181 f., schneid. einand. od. sind parall. od. divergiren in der imag. Geom. 181–184, *334 f., *453.

Nebenwinkel, zusammen $=\pi$ 114, 116.
Neigung gerader Linien gegen einand. 113.
Nichtschneidende Gerade 11; haben ein gemeins. Loth 26, dessen Konstr. *253, *255 f.
Nichtschneidende Gerade 165; zwei Ger., die auf e. dritten senkr. stehen, sind nichtschn. 119, ebenso zwei Ger., die von e. dritt. auf ders. Seite unt. gleich. W. geschn. werden 167; in d. gew. Geom. sind die nichtschn. Ger. zugleich parallel 173; vgl. Loth.
Normalebenen (=Durchmesserebenen) einer Gränzkugel 12.
Normalen (= Axen) einer Gränzkugel 12.

Oberfläche eines sphär. Vielecks 117, vgl. Flächeninhalt.
Oberflächenelement in rechtw. Koord. 42, Gl. (44), *277; bei e. Umdrehungsfläche 45, Gl. (48).
Oktaeder (regelm.) 9, 142 f.
Oricycle (= Gränzlinie) *335.
Orisphäre (= Gränzfläche) *336.
Ort eines Körpers 3, 84.

Parallele Gerade u. Sätze über sie 11; Konstr. der Parall. zu einer geg. Geraden *256.
Parallel. Begr. p. Kreise auf e. Kugelfl. 132; Begriff p. Geraden 165 f.; durch jeden Punkt giebt es eine od. zwei P. zu einer gegeb. Geraden 166 f.; eine Ger., die einer and. p. ist, ist das von jedem ihrer Punkte aus 167; der Parallelismus zweier Ger. ist gegenseitig 169; zwei Eb. durch zwei par. Ger. schneid. ein. in einer dritten P. 169 f.; e. Ger. ist einer Eb. p. 170; zwei einer dritt. p. Ger. sind ein. p. (in d. Ebene u. im Raume) 171 f.; die Ebenen durch drei p. Ger. bilden innere W., deren Summe $=\pi$ 172, *331 f.; p. Ger., wenn die Winkels. des geradl. Dr. $=\pi$ 173; p. Gerade zwisch. d. Schenkeln eines W. in d. gew. Geom. 176 f.; p. Gränzlinien auf e. Gränzfl. 193. Vgl. Loth.
Parallelenaxiom (Euklidisches) 68; die Versuche zum Beweise des P. 68–73.
Parallelismus, mangelhafte Erklärung des P. 79; der P. in seiner vollen Allgemeinh. 166; Seite des P. bei parall. Geraden 181.

Parallelogramm in der gew. Geom. 176.
Parallelwinkel, der zu dem Lothe a gehört, $= F(a)$ 11; Bestimmung von $F(a)$ 19 f., *243; Konstr. des Lothes, dessen P. e. geg. spitz. W. ist 242 f.; die trigon. Fkt. von $F(x)$ sind hyperbol. Fkt. von x *243; eine elementargeom. Deutung von $F(x)$ *245 f. Vgl. *239.
Parallelwinkel, der zu einem Lothe p gehört, $= \Pi(p)$ 167; wenn die Winkels. im geradl. Dreieck $< \pi$, so ist jeder spitze W. d. P. eines bestimmten Lothes 174 f., *332 f.; wie sich der P. $\Pi(x)$ mit x ändert 174; die Fkt. $\Pi(x)$ für negative x 175. Der P. ist in d. gew. Geom. konstant, in d. imagin. veränd. 176. Bestimmung d. Fkt. $\Pi(x)$ 212—214, anders 214—218, *341.
Polarkoordinaten, Uebergang von rechtw. Koord. zu P., in der Ebene *265, im Raume *290. Vgl. Bogenel., Flächenel., Raumel.
Pole der Ebene 95, welche Punkte P. e. Eb. sein können 100 f., 102 f.; gegenüberl. P. einer Kugelfl. 99; P. e. gerad. Linie in d. Ebene 108.
Projektion einer Geraden auf e. Eb. 128.
Projiciren s. Projektion.
Punkt 5, 90; d. P. als Schnitt von Linien 91; seine Grösse ist stets null 92. Vgl. Gerade, Ebene, parallel.
Punkthafte Berührung 4, 88 f.
Pyramide 144; Raumel. e. P., deren Grdfl. e. rechtw. Dr. u. deren Kanten parall. sind, sodass eine auf d. Grdfl. in einem spitz. W. senkr. steht 48, Gl. (51), (52), *284; Rauminh. dieser P. 56, Gl. (73), (74), 57, Gl. (75), *296. Raumelement e. P., deren Grdfl. e. rechtw. Dr. ist und von deren endl. Kanten eine auf d. Grdfl. in e. spitz. Winkel senkr. steht 53, Gl. (62), *291; verschiedene Formen für d. Inhalt dieser P. 54, Gl. (67), 55, Gl. (70), 56, Gl. (71), *291—296; Anwendung auf d. P. mit parall. Kanten 56 f. Zusammensetz. d. P. von endl. Höhe aus vier solchen mit parall. Kanten 57, Gl. (76); die Inhalte dieser vier P. 59, Gl. (80), (81), *297—299. P., deren Grdfl. e. Viereck mit drei recht. W. ist u. deren Kanten parall. sind, so dass eine in dem mittleren rechten W. auf d. Grdfl. senkr. steht 60 Z. 9; Zusammensetz. dieser P. aus zwei dreiseit. 60 Z. 12, 11 v. u., *299 f. Raumelem. e. P. in rechtw. Koord. 63, Gl. (87), *302 f. Rauminh. e. P. von endl. Höhe, deren Grdfl. e. Viereck mit drei rechten W. ist 64, *307 f.

Raum u. umgebender R. 3, 84.
Raumelement wenn man zur Koord.-Best. benutzt e. Schaar Gränzkugeln mit gemeins. Axen u. zwei Schaaren von Normalebenen dieser Gr. 51 f., *288; R. in rechtw. Koord. 52, Gl. (59), (60), *288 f.
Rauminhalt e. Körpers, der begränzt wird von zwei Gränzkugeln mit gemeins. Axen u. von e. Kegel, dessen Erzeugende Axen der Gr. sind 46 f., Gl. (49); R. e. Körpers, der begränzt wird von vier der Reihe nach auf ein. senkr. Ebenen, die ein. in parall. Geraden schneiden, und von einer Cylinderfl., die auf einer dieser Ebenen e. Gränzkreisbogen ausschneidet 47, Gl. (50), *282 f. Vgl. Kreiskegel, Kugel, Pyramide.
Rechteck in d. gew. Geom. 163.
Rechter W. 113, 116.
Rechtwinkliges Dreieck 114, vgl. Dreieck u. Kongruenzs.
Regelmässiges Vieleck 132; r. körperl. Winkel 139; r. Körper 9, 139; jeder r. Körper hat einen Mittelpunkt 140 f.; die fünf r. K. 9, 142, Zahl ihrer Ecken u. Kanten 142 f. Vgl. *323.
Reihenschnitte 3, 85, Unterschied von d. Wendeschn. 86 f.

Scheitel eines geradl. W. 114, eines körperl. W. 117.
Scheitelwinkel sind gleich 115, 116; der S. eines körperl. W. 117.
Schenkel eines gleichsch. Dreiecks 109, eines geradl. W. 113, eines Ebenenwinkels 116.
Schiefe Lage gerader Linien 114.
Schneidende gerade Linien 11, 165.
Schnitt u. Seiten eines S. 3, 84; S. übers Kreuz 86.
Sechsflach (regelmässiges) 142 f.
Seite eines Schnittes 3, 84, e. Ebene 95, e. Geraden 108; S. eines Vielecks 109, e. Ebenenwinkels 116, e. körperl. W. 117, e. Pyramide 144.
Senkrecht (vgl. Loth). Se. Lage von ger. Linien 114, von Ebenen 116. Von jedem Punkte e. Geraden aus giebt es nur eine S. 118 f., deren Konstr. 123; Se. auf e. Ebene 8, 125, von jedem P. d. Eb. aus nur eine S. 126; deren Konstr. 126. Jede Ebene, die durch eine auf e. Eb. senkr. Ger. geht, steht auf dieser Eb. senkr., und zwei Eb., die auf e. dritt. s. stehen, schn. ein. in e. auf dieser Eb. senkr. Ger.

126 f. Zwei Ger., die auf e. Eb. s. stehen, liegen in e. Eb. 128. Se. Lage grösster Kreise auf e. Kugelfl. 128; durch jeden P. eines grösst. Kr. geht nur eine Se. 128, deren Konstr. 131; senkrechter grösster Kreisbogen als kleinster od. grösst. Abstand e. Punktes von einem grösst. Krb. 132, 149 f. Senkr. Gränzlinien auf e. Gränzfl. 193.
Sphärisches Vieleck 109; Zusammenhang d. sph. Geom. mit d. imag. 65, 235; die sphär. Geom. ist vom Parallelenax. unabhängig 235. Vgl. Dreieck, Kongruenzs., Flächeninhalt.
Spitze e. Dreiecks 109, e. geradl. Winkels 114, e. körperl. W. 117, e. Pyramide 144.
Spitzer Winkel 113.
Spur einer Geraden 128.
Stücke eines Dreiecks 154.
Stumpfer Winkel 113.
Symmetrische sphär. Vielecke 117; symm. sphär. Dr. sind flächengleich, weil sie aus gleich. Theil. zusammensetzb. sind 136; symm. Gränzdr. 194; Zusammensetz. zweier symm. (geradl., sphär. od. Gränzbogen-) Dreiecke aus gleich. Theilen 194, *338. Vgl. gleichschenklig.
Synthese als Methode der Math. 80 f.

Tangente, Winkel zwisch. d. T. einer Kurve u. der Ordin. des Ber.-Punktes 31, Gl. (35).
Tetraeder (regelm.) 9, 142 f.
Theile übers Kreuz 86.
Trigonometrische Fkt. s. Funktion.

Umdrehungsfläche, ihr Oberflächenelem. 45, Gl. (48), *281; ihr Rauminhalt 50, Gl. (57), *287.
Umfang einer Figur 109.
Umgebender Raum 3, 84.
Ursprung der erzeug. Kreise auf e. Eb. 97; jeder Punkt d. Eb. kann U. sein 103 f.

Vieleck, geradl. u. sphär. 109; zu jedem sph. V. gehören zwei körperl. W. 117; jede Seite e. geradl. Vs. ist kleiner als die Summe der übr. 124; regelm. V. 132; sphär. V. aus Dreiecken zusammenges. 136 f.; V. mit dopp. Begrünzung 138; Zerlegung geradl. u. sphär. V. in Dreiecke, die alle addirt werden 138 f.; Kongruenz von V. 155. Vgl. Flächeninhalt.
Vielseitiger körperl. W. 117.
Viereck, geradl. 109. Zu jedem geradl. V. mit drei rechten W. gehört ein rechtw. geradl. Dreieck 26; Gl. zwischen d. Seiten u. dem spitzen W. e. solch. Vierecks 25 f., Gl. (20), (21), (22), andre Ableit. dieser Gl. *254 f. Zusammenstell. aller derart. Gl. *347, V., von dem zwei Seiten auf d. Grdl. senkr. stehen, Gl. zwisch. seinen Seiten u. W. 30 f., Gl. (31), (32), *261 f. Die vierte Seite ist d. Grdl. parallel 31, Gl. (33), *263; 32 f. Grösse der vierten Seite, wenn die Grdl. unendl. klein u. die beiden darauf senkr. Seiten gleich sind *263, Gl. (VI).
Vierflach (regelm.) 142 f.
Volumen s. Rauminhalt.

Wendeschnitte 3 f., 86; Unterschied von den Reihenschn. 86 f.
Winkel, Begriff u. Messung 8; braucht nicht blos von d. Verhältn. der Linien abzuhängen 76 f.; das Zeichen π bei der Winkelmessung 8, 112; Begriff und Messung des geradl., Ebenen- u. körperl. W. 113; W. eines geradl. Vielecks 114. W. zweier Kreisb. auf e. Kugelfl. 116. W. e. sphär. Vielecks 117. W. zwisch. e. Ger. u. e. Eb. 128. Halbirung e. geradl. W. 122, e. Ws. auf d. Kugelfl. 131. W. zwisch. Gränzlin. auf e. Gränzfl. 193. Vgl. spitz, stumpf, Dreieck, Kongruenzs., Winkelsumme.
Winkelsumme beim geradl. u. sphär. Dr. 8, 10; W. des rechtw. geradl. Dr. d. imag. Geom. ausgedr. durch d. Kath. 23 f., *249 f. W. e. belieb. geradl. Dr. ausgedr. durch d. Seiten *269 f.
Winkelsumme, Verwandl. e. geradl. Dr. in eines von gleich. W. 69. Die W. des geradl. Dr. nicht $> \pi$ 161, Legendres Beweis 161 f., *330; ist d. W. in einem Dr. $= \pi$, so in allen 162. Vergleich. d. W. in einand. lieg. geradl. Dr. 164. Ist d. W. $= \pi$, so gew. Geom., ist sie $< \pi$, imag. Geom. 173—176. Die W. d. sphär. n-ecks ist $> (n-2)\pi$ 138. Nehmen zwei Seiten e. sphär. Dr. ab, so kommt d. W. belieb. nahe π 154. Die W. e. Gränzliniendr. auf e. Gränzfl. $= \pi$ 193. Vgl. Flächeninhalt u. Ebene.
Würfel (regelm. Hexaeder) 9, 142 f.

Zwanzigflach (regelm.) 142 f.
Zweiecke, die Legendreschen 75 f. *317 f.
Zwölfflach (regelm.) 142 f.

Namenregister
zur Uebersetzung und zu den Anmerkungen.

Namen, die nur in den Anmerkungen vorkommen, sind mit einem * versehen.

*Andrade *310.
Archimedes 82 f.
d'Assas-Montdardier 22, *248.

*Bartels *338, *424.
Bertrand aus Genf, sein Versuch zum Beweise des Parallelenaxioms 71—73, *315, *450—453.
*Bolyai, J., seine Konstruktion der Parallelen *256; benutzt die Abstandslinie *265; *316; benutzt die Stetigkeit *333.

*Cagnoli *322, *426.
Cauchy, sein Beweis für den Eulerschen Polyedersatz 143, *324; *238.
*Cayley *258.

Descartes 1.

Euklid 1, 67, 68, 166 f.
Euler, sein Polyedersatz 10, 143, *238, erleidet Ausnahmen 144 f., *323 f., untersucht die sphärischen Dreiecke mit gemeinsamer Grundlinie und gleichem Flächeninhalt *321.

*Flamsteed *248.

*Gauss besass zwei Hefte des Kasaner Boten *270; *321.
*Gerling *322.
Grunert, sein Beweis für den Eulerschen Polyedersatz 10, *238.
*Gudermann *244.

*Harzer *248.

*Kaestner *322.
*Klein, F., *258.
*Kronecker *289.

Lagrange 82, *318.
*Lambert benutzt die hyperbolischen Funktionen *243, führt einen Hülfswinkel ein, der das Komplement des Lobatschefskijschen Parallelwink. ist *245; *330.
Laplace 24, 66, *252, *308—310.
Legendre, von ihm gefundene Integrale 63, 64, *302, *305, *307, seine Versuche zum Beweise des Parallelenaxioms 68, 69, 70, 71—76, *311—313, *315, *317 f., sein Beweis des Eulerschen Polyedersatzes 143, *324, sein Beweis dafür, dass die Winkelsumme im Dreiecke nicht $> \pi$ sein kann 161 f., *330, und dass die Winkelsumme stets $= \pi$ ist, wenn sie in einem Dreiecke diesen Werth hat 164, *330; vgl. *450 f.
*Lexell *321.
*Lhuilier *324.
*Lorenz *313.

*Moebius *326.

*Nepersche Regel *327, ihr Analogon bei den rechtwinkligen geradlinigen Dreiecken der imaginären Geometrie *346 f.
*Netto *289.
Newton 1.

*Petrofskij besitzt einen durchlaufend paginirten Abdruck der Arbeit „Ueber die Anfangsgründe“ *237, vgl. 474.
*Poisson *310.

*Riemann *316.

*Saccheri *318, *330, *333.
*Schumacher *321.
*Simon, M. *245.
*Stäckel *237, *245, *451.
*Study *326.

*Taurinus *270, *333.
*Tresse *311.

*Zach *322.

Namenregister
zur Lebensbeschreibung Lobatschefskijs und zu den Nachweisungen.

L. bedeutet Lobatschefskij.

Alexander I stiftet die Universität Kasan 430.

Baltzer ist für das Bekanntwerden Ls. und J. Bolyais thätig 420, 444 f.
Bartels, J. M. C., sein Leben u. seine Freundschaft mit Gauss 352—355; 424; Lehrer u. Beschützer Ls. 355—358, 360; urteilt über L. 358 f.; seine Stellung in Kasan 360, 364; geht nach Dorpat 365, 366; ob Vermittler zwischen Gauss u. L.? 378—382, 425, 428 f.; seine Vorlesungen über math. Analysis 354, 424; 406.
Battaglini übersetzt Ls. G. U. 421, 445.
Bellingshausen 365.
Beltrami 420.
Bernoulli (Johann III) 377.
Bertrand, Louis, aus Genf 362, 369, vgl. 315, 450—453.
Bessel 453 f.
Biot 427.
Bolotoff 436.
Bolyai, J., Sohn des Folgenden, entdeckt die nichteuklid. Geom. 375 f.; seine Unabh. v. d. and. Entdeckern 377 f., 382, 429; lernt Ls. G. U. kennen 378, 428; sein Appendix mit Ls. Arbeiten verglichen 392—394; seine Leistungen erst spät anerkannt 419, 421; 399, 444 f., 454.
Bolyai, W., Freund v. Gauss u. Vater Johanns 375, 378, 379, 382, 429, 432; spricht rühmend von L. 428; 454.
Bolzani, Prof. in Kasan 404.
Boncompagni 423.
Braun, Prof. in Kasan 360.
Breguet 439.
Brendel 455.
Brockhaus, Verleger des Gersdorfschen Repertoriums 434.
Bronner, Lehrer u. Beschützer Ls. 355—357; Direktor des pädag. Instit. in Kasan 359, 387; verlässt Kasan 364 f.; 360, 424.
Bunjakofskij schreibt üb. d. Parall.-Th. 404, 441, 455.

Cagnoli, sein Lehrb. d. Trig. von L. benutzt 362, 426.
Camerer 453.
Cayley 419.
Chasles 419.
Chompré 362, 426.
Condillac 430.
Cousin, von L. bei Vorles. benutzt 431.
Crelle 397, 432.

Delambre 427.
Delboeuf, J., erwähnt 1860 L. 442 f.
Develey 450.
Diderot 426.
Dingler 439.
Dirichlet 396, von L. erwähnt 412; kennt d. Geom. v. Gauss u. L. 443 f.
Duclos von L. erwähnt 431.

Encke, Brief v. Gauss an E. 398, 432, 455.
Erman 439, 449.
Euklid, seine Autorität 376, 379 f., 398.
Euler 354.

Ferdinand, Karl Wilhelm F., Herzog v. Braunschweig, Gönner von Gauss und Bartels 352 f.
Finckesche Buchhandl. 433, 438, 448.
Fourier, von L. bei Vorles. benutzt 427.
Fresnel, von L. bei Vorles. benutzt 427.
Frischauf, J., 421, 445.
Fuchs, Prof. in Kasan 352, 384.
Fuss, Nik. 353, beurteilt ein geom. Lehrb. Ls. 368.

Gauss, Freund v. Bartels 353 f., 378, 424; seine Disqu. arithm. 355, 359, 362; entdeckt d. nichteuklid. Geom. 374, 377, 378—380; beinflusst Taurinus 375, 428; sein vermeintlicher Einfluss auf L. u. J. Bolyai 378—382, 428 f.; findet später auch d. sog. Riemannsche G. 383, 429; lernt d. Arbeiten Ls. kennen u. rühmt besonders d. G. U. 398 f., 400, 420, 432—434; sein Urtheil üb. d. and. Schrift. Ls. 407, 433, 441; seine Autor. wirkt für das Bekanntwerden der Arb. Ls. 419 f.; seine russ. Studien 436; sein Briefwechsel mit W. Bolyai 379, 424, 427, 429, m. Schumacher 420, 429, 436, m. Gerling 398, 428, 431, 432—434, 441, m. Encke 398, 432, m. Olbers 380, m. W. Struve 435; Brief an Taurinus 374, 428; G. u. Dirichlet 443 f.; vgl. 453 f.

Gerling, Schüler u. später Freund v. Gauss, erzählt von Schweikart u. Pfaff 428, 429, vgl. Gauss.

Gersdorf, Herausg. des Repertoriums der gesammten deutschen Literatur, 398, 433 f.

Halsted, übersetzt die G. U. Ls. 421 445, dsgl. die Rede Wassiljefs über L. 423.

Heller, A. 425.

Helmholtz 420.

Hermann, Prof. in Kasan 357.

Hoüel ist für d. Verbreitung der Ideen Ls. thätig, übersetzt die G. U. 421, 445.

Humboldt, A. von, 439.

Ide 450.

Jakofkin, Rektor des Kasaner Gymnasiums und Prof. an der Univ. 351, 356, 360.

Janischefskij, E., Ls. Biograph 349, 423; 385, 387, 405; 424—441.

Jesipof, der Begleiter Sheltuchins, 371.

Kaestner und Bartels 352, 380, 429.

Kant 359, 443.

Kampffmeyer 438.

Kasan, die Universität, ihre Gründung 351 f.; Streitigkeiten unter den Prof. 360 f.; die Magnizkijsche Periode 363—367; die Sheltuchinsche Revision 370 f., ihre Folgen 383 ff.; das Jahresfest der Univ. 388, 430.

Kasaner Nachrichten 357, 366, 425, ersetzt durch d. K. Boten 366, 371, 392, 394, vgl. 237; an die Stelle des K. B. treten die K. Gelehrten Schriften 394, vgl. 237.

Killing 420, 442.

Klein, F., über Gauss, Bartels und L. 420, 428, 436.

Knigge, von L. erwähnt 431.

Knorr, A., Sohn des Folg. 438 f., 440.

Knorr, E., Prof. in Kasan 391; giebt meteorol. Beobb. heraus, denen L. eine Abhandl. üb. unendl. Reihen beigiebt 399, 448; von ihm hat Gauss wahrsch. e. russ. Arbeit Ls. erhalten 400, 437 f., 455; seine Beschäftig. mit d. Parallelth. 400 f., 439, 440 f., 453; war mit L. befreundet 438; Lebensgesch. u. Schriften 438—440.

Knorre, K. F., Astronom in Nikolajef, von Gauss erwähnt, aber wahrscheinl. mit E. Knorr verwechselt 398, 400, 432, 437 f.

Knorre, V., Sohn des Vorigen 438.

Kondyref berichtet ungünstig über L. 355 f.; Bibliothekar 366.

Kupffer, Prof. in Kasan 399.

Lacroix, von L. bei Vorles. benutzt 427, 431, 450.

Lagrange 354, von L. erwähnt 414, bei Vorles. benutzt 427, 431.

Lambert, J. H., seine Arbeit über Parallellinien 376 f., 380, 383, 453 f.

Lang, Frau Ella Edle v. L., geb. v. Littrow 426.

Laplace, von L. studirt 355, bei Vorl. benutzt 427.

Legendre, seine Zahlenth. von L. bei Vorles. benutzt 362, seine geometr. Unters. von L. studirt 363, 380, 381; 440 f., 454.

Lessing 426.

Lie, Sophus 420, erhält den ersten L.-Preis 422.

Lipschitz, historische Mittheilungen von Li. 443 f.

Littrow, J. J., Lehrer u. Beschützer v. Lob. 355—357; 358; veröff. Kometenbeob. v. Lob. u. Simonof 359; 360; verlässt Kasan 364 f.; Brief üb. die Kasaner Verhältn. 425; sein Tagebuch 426, 438; borgt Lob. Bücher 426.

Lobatschefskij, Alexander Iwanowitsch, Bruder d. Nikolaj 351; nimmt sich das Leben 351 f.

Lobatschefskij, Alexej Iwanowitsch, Bruder des Nikolaj 351, 356, 386.

Lobatschefskij, Nikolaj Iwanowitsch, Quellen zur Biogr. 349 f., 423; Geburt, Aeltern 351; besucht das Kas. Gymn. 351 f.; bezieht d. Univ. 352; Schüler v. Bartels 352, 359; Studienzeit, Jugendstreiche 355 f.; wird Magister 357; studirt bei Bartels die Mécanique cél. u. d. Disqu. arithm. 358 f.; daran

anknüpf. Jugendarbeiten 359; Urteil von Bartels über ihn 358 f.; beob. d. Kometen v. 1811: 359; Schüler v. Bronner 359; erste Lehrthätigkeit 360, 362; Adjunkt 361; ao. Prof. 361; L. „Günstling" des Kurators 426; Reisen 361; erste geometr. Versuche 362 f.; Magnizkijsche Zeit 364—367; L. ord. Prof. 364; ausgedehnte Lehrthät. 365, 426 f.; Verwaltungsgeschäfte, L. wird Dekan 362, 366; Verhalten gegenüber Magnizkij 367.

Sein ungedr. Lehrbuch d. Geom. v. 1823: 367—370, von N. Fuss beurteilt 368; sein Lehrbuch d. Algebra 370, 397, 411 f., 446; er legt 1826 der physiko-math. Abth. seine „Exposition" vor 371; deren Inhalt u. Bedeutung 371—373; seine Vorläufer u. Nebenbuhler in der nichteuklid. Geom. 374—378; seine Unabh. von Gauss 378—382; die Riemannsche Geom. ist ihm entgangen 383; L. wird Rektor d. Univ. Kasan 384, Wirksamkeit als solcher 384—391, im Senat 384 f., Ordnung der Biblioth. u. der Institute 385 f., Reorgan. d. pädagog. Instituts 387, Rede üb. d. Aufgaben d. Erziehung 388, 430 f., 446, die Cholerazeit 389 f., Universitätsbauten 366, 390, populäre Vorträge 391; Orden u. Auszeichnungen 391 f.

Schriften 1827-46: 392—401; „Ueber die Anfangsgründe" 392, 396 f., 407 f., 446, e. kränkende Kritik dieser Arb. 396, 432, 433; Vergleich mit J. Bolyais Appendix 392—394; Gründung d. Kasaner Gel. Schr. 394 f.; d. „Imaginäre Geometr." 395, 397, 409, 447; „Anwend. d. imag. Geom. auf Integrale" 395, 409 f., 447; die „Neuen Anfangsgr." 395 f., 407, 410 f., 447; die „Geom. Unters." 397 f., 448; eine „alberne" Kritik darüb. 432—434; Urteil von Gauss 420, 433; Gauss über L. 398, 407, 432—434; wie Gauss zu Ls. Schriften gekommen ist 398, 400, 434—436; Gauss veranlasst d. Wahl Ls. zum Korr. d. Gött. Ges., Ls. Dankschreiben 399, 436 f.; Ls. Interesse f. meteorol. Beobb. 399 f.; L. in Pensa zur Beob. d. Sonnenfinst. 401; L. pensionirt u. Vertreter d. Kurators 402; Abnahme seines Einflusses 402 f.; Familienverh. 403, 441; die „Pangeom." 403, 411, 449; er erblindet u. stirbt 403; in Russland unbeachtet 404, 422; äussere Erscheinung u. Charakt. 404 f.; L. als Lehrer u. Examinator 405 f.; Reisen 406; betreibt d. Landwirthsch. zur Erholung 406.

Ls. Stil 407 f.; seine rein analyt. Unters. 411; die Arbeit über die Gl. $x^n - 1 = 0$ 412, 446, üb. d. trigon. Reihen 412—415, 447; seine Ansichten üb. d. Funktionsbegr., üb. Stetigkeit u. Differentiirbark. 413—415, 417, 442; sein Verfahren zur Unters. d. Reihenkonv. 415—417, 447; Abh. v 1841 über die Konv. unendl. Reihen 399, 418, 448; Abh. üb. best. Integr. 418, 448 f. Chronolog. Verz. seiner gedr. Veröff. 445—449.

L. vergessen 419; er wird allmähl. bekannter 420 f.; Feier seines hundertjähr. Geburtst. 421 f.; d. L.-Preis 422.

Lobatschefskij, Johann 456.

Mably, von L. erwähnt 430.

Magnizkij revidirt die Univ. Kasan 363, wird Kurator u. reorg. d. Univ. 363 f., 426; Folgen der Reorg. 364 f., 386, 387; seine Grundsätze 364, 366, 368; wird abgesetzt 370 f., 383 f.

Makarjef, Ls. Geburtsort? 351.

Moebius 419.

Molostwof, Kurator der Univ. Kasan, Nachf. Mussin-Puschkins 402.

Monge 355, von L. bei Vorles. benutzt 427.

Moser 439.

Mussin-Puschkin, Kurator d. Univ. Kasan, Nachf. Magnizkijs 371, 384; veranl. d. Wahl Ls. zum Rektor 384; sorgt für d. Ordn. d. Bibl. u. d. Universinstit. 385 f., für die Ergänz. des Lehrkörpers 386 f.; sein Verh. zu L. 388, 423; 389, 391; wird nach Petersburg versetzt 402.

Nikolaus I. ordnet 1826 die Revis. d. Univ. Kasan an 371.

Nikolskij erst Adjunkt 355, dann Prof. an d. Univ. Kasan 365.

Nischni-Nowgorod, Ls. Geburtsstadt? 351, 424.

Olbers 380, 444.

Oltmanns 439.

Pasquich 425.

Pfaff 352, seine Ansicht üb. d. Parallelth. 429.

Poggendorff 437, 439 f.

Poisson, von L. bei Vorles. ben. 427.

Poncelet 419.

Popof, Ls. Schüler u. Nachf. 401, 448; P. üb. L. 404 f., 441.

Potocki übersetzt die Janischefskische Biogr. Ls. 349, 423.

Puissant 426.

Puschkin, der Dichter, 436.
Puschkin s. Mussin-Puschkin.

Renner, Ls. Lehrer 355, 364 f.
Riemann, B., d. Entdecker d. zweiten nichteukl. Geom. 383, 419 f.
Rochefoucauld, von L. erwähnt 431.
Rumofskij, erster Kurator der Univ. Kasan 351, 357, 360.

Saccheri 376 f., 383, 454.
Sagoskin entdeckt d. Manuskr. d. L.-schen geom. Lehrbuchs v. 1823: 368.
Saltykof, Nachf. Rumofskijs als Kurator der Univ. Kasan 360 f., 426.
Sartorius von Waltershausen 455.
Schmidt, Franz 424, 428, 445.
Schubert, der Astronom 436.
Schumacher, Notiz aus e. Tagebuche Ss. von 1808: 379 f., 429. Sein Briefwechsel mit Gauss 398, 420, 429, 436, 444, 454 f.
Schweigger 446.
Schweikart entdeckt selbständig die nichteuklid. Geom. 374 f., 377 f., 382, 428, 432; die Zeit seiner Entd. 428; vgl. 453 f.
Sheltuchin revidirt 1826 die Univers. Kasan 371, 383.
Shilowa 456.
Simonof, Studiengenosse u. Kollege Ls. 358 f., 361; ist lange von Kasan abwes. 365; Dekan 366; mit L. in Pensa 401, Ls. Nachf. als Rektor 402; steht mit Littrow in Briefw. 426.
Sinzof, Dr. u. Docent an d. Univ. Kasan 423.
Solnzef, Prof. an d. Univ. Kasan 361.
Sonin 456.
Stäckel entdeckt d. Geom. prima Elementa des Taurinus 375; wird J. Bolyais Nachlass zugängl. machen 393, 424; hat Littrows Nachlass eingesehen 426; 427, 428, 429, 432, 435, 436; stellt die Vermuthung auf, dass Gauss Knorr mit Knorre verwechselt habe 437 f., 438, 455; 444, 445.
Staudt, v., 419.
Steiner 419, 453.
Struve, O., Sohn des Folg., Mittheilungen üb. Bartels 381, 429; besucht Gauss und schickt diesem nachher Schriften Ls. 435 f.
Struve, W. 424, 435.
Suchomlinof 426.
Suták üb. d. magyar. Manuskr. J. Bolyais 428.

Taurinus entdeckt selbständig, dass aus d. sphär. Geom. e. neue (d. nichteukl.) Geom. abgeleitet werden kann, deren Mögl. er vorher von Schweikart und Gauss erfahren hat 375, 377 f., ein Brief v. T. an Gauss 428; vgl. 453 f.
Temnikof 453.

Ueberweg 442, 456; erwähnt 1860 L. 455.

Wachter, Schüler v. Gauss 380, 454.
Wassiljef, seine Rede üb. L. 349, 422, 423; sammelt Material zu e. Biogr. Ls. 349, 358; berichtet üb. Ls. erste geom. Versuche 362 f., 426; Mittheil. üb. Ls. ungedr. geom. Lehrb. v. 1823 368—370; 371, 388; berichtet üb. Ls. rein analyt. Arb. 411, 442; Vorsitzender der physik.-math. Ges. zu Kasan 422; 423—442; macht auf Delboeuf u. Lipschitz aufmerksam 442.
Weber, W. 446.
Wheatstone, L. veröffentl. e. Auszug aus e. Arb. Ws. 394, 446.

Nachwort.

Zwei der wichtigsten Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie, die, in russischer Sprache geschrieben, bisher so gut wie unbekannt waren, lege ich hiermit den Mathematikern in deutscher Uebersetzung vor. Es sind das die beiden Lobatschefskijschen Abhandlungen: „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie“, erschienen 1829—30 im Kasaner Boten, und „Neue Anfangsgründe der Geometrie“, erschienen 1835 und in den folgenden Jahren in den Gelehrten Schriften der Universität Kasan. Erst wer diese Abhandlungen gelesen hat, kann sich einen Begriff von dem machen, was Lobatschefskij auf dem Gebiete der nichteuklidischen Geometrie erstrebt und geleistet hat: die bisher allein bekannten, deutsch oder französisch geschriebenen Arbeiten Lobatschefskijs sind dazu nicht ausreichend. Ausserdem bilden die von mir übersetzten Abhandlungen zusammengenommen ein vollständiges Lehrbuch der nichteuklidischen Geometrie, ein Lehrbuch, wie wir es bisher noch nicht besassen, das nicht blos eine systematische Darstellung der Elemente enthält, sondern auch eine sehr beträchtliche Anzahl von Beispielen für die Berechnung von Bogenlängen, Flächenräumen und Körperinhalten.

Für den Leser, der aus diesen Schriften die nichteuklidische Geometrie kennen lernen will, möchte ich gleich hier bemerken, dass er am Besten mit den „Neuen Anfangsgründen“ beginnt, und auch von diesen möge er die Einleitung, S. 67 – 83, zunächst ganz überschlagen. Hat er sich mit dem Inhalt der „Neuen Anfangsgründe“ vertraut gemacht, so wird ihm die Einleitung dazu keine Schwierigkeiten mehr machen, und er wird dann auch die Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe“ ziemlich leicht lesen können, wenn er die von mir beigegebenen Anmerkungen zu Rathe zieht. Solche Leser, die mit der höhern Mathematik gar nicht vertraut sind, werden sich mit dem Studium der „Neuen Anfangsgründe“ begnügen müssen.

Den auch sonst von mir befolgten Grundsätzen getreu, habe ich meiner Uebersetzung die Seitenzahlen der von mir benutzten russischen Ausgaben beigefügt, und zwar sind die Seitenzahlen der Origi-

nalausgaben, also des Kasaner Boten und der Kasaner Gelehrten Schriften, kursiv gesetzt, die Seitenzahlen der „Vollständigen Sammlung der geometrischen Arbeiten Lobatschefskijs", Band I, Kasan 1883, in Antiqua. Von mir herrührende Zusätze im Texte sind durch Einschliessung in eckige Klammern kenntlich gemacht. Das Datum am untern Rande der ersten Seite jedes Bogens bezeichnet den Tag, an dem ich den Bogen für druckfertig erklärt habe.

In der Uebersetzung habe ich mich dem Wortlaute des Urtextes möglichst genau angeschlossen, auch wenn dadurch die Uebersetzung, dem ziemlich schwerfälligen Stile Lobatschefskijs entsprechend, zuweilen etwas Ungeschicktes, ja Undeutsches bekommen hat. Solche Unebenheiten hätte ich nur auf Kosten einer treuen Wiedergabe der Lobatschefskijschen Gedanken vermeiden können, und ich hätte mich dann leicht dem Vorwurfe ausgesetzt, etwas Andres gesagt zu haben, als was Lobatschefskij hat sagen wollen. Es ist eben zweierlei, ob man ein poetisches oder ein prosaisches Kunstwerk aus einer Sprache in eine andre übertragen will, oder ob man diese Aufgabe bei einem wissenschaftlichen Werke zu lösen hat. Im ersten Falle muss sich der Uebersetzer bestreben, mit den Mitteln seiner Sprache ein ähnliches Kunstwerk zu schaffen, und darf sich deshalb grosse Freiheiten nehmen. Im zweiten Falle ist es seine vornehmste Pflicht, sich vor jeder Entstellung der Gedanken des Originals zu hüten: die Form, in der er diese Gedanken wiedergiebt, kommt erst in zweiter Linie, und er wird oft in der Lage sein, die Schönheit seiner Uebersetzung der Treue opfern zu müssen.

Erwähnt seien noch einige Aeusserlichkeiten: An vielen Stellen habe ich Absätze angebracht, wo der Urtext keine hatte; die Uebersichtlichkeit des Ganzen wird dadurch wesentlich erhöht. Aus demselben Grunde habe ich die Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe" in Paragraphen eingetheilt. Alles in Sperrdruck Gesetzte war fast durchweg schon von Lobatschefskij selbst durch den Druck hervorgehoben. Die beiden ausführlichen Inhaltsverzeichnisse auf Seite VII—IX und IX—XVI sind von mir neu hinzugefügt, während bisher etwas Derartiges gänzlich fehlte.

Durch zahlreiche und eingehende Anmerkungen das Verständniss der Lobatschefskijschen Abhandlungen möglichst zu erleichtern, habe ich mir ganz besonders angelegen sein lassen. Durchaus geboten schien mir das namentlich bei der Arbeit „Ueber die Anfangsgründe", in der die Zwischenrechnungen meist weggelassen und nur die Endergebnisse mitgetheilt sind. In den Anmerkungen habe ich überall diese Zwischenrechnungen vollständig ausgeführt, so dass der Leser

nicht erst nöthig hat, mühsam die Wege aufzusuchen, auf denen Lobatschefskij zu seinen Resultaten gelangt ist.

Wenn die übrigen Abhandlungen Lobatschefskijs etwas enthielten, was zur Ergänzung der hier übersetzten dienen konnte, so habe ich das in den Anmerkungen verwerthet, indem ich es entweder auszugsweise oder nach dem Wortlaute des Originals wiedergab. Den Schluss der Anmerkungen bildet eine kurze Zusammenstellung einiger wichtiger Formeln der nichteuklidischen Geometrie, Seite 345—348: auf diese möchte ich noch ausdrücklich aufmerksam machen.

Wirklich benutzbar werden jedoch meine Anmerkungen nur dann, wenn man sie neben die Uebersetzung legen und also lesen kann, ohne erst umschlagen zu müssen. Deshalb ist das ganze Werk in zwei Theile zerlegt, die einzeln einbinden zu lassen ich nicht dringend genug empfehlen kann.

Hinter den Anmerkungen folgt eine Lebensbeschreibung Lobatschefskijs, in der ich auch dessen geometrische und sonstige Leistungen zu würdigen versucht habe; in den Nachweisungen zu dieser Lebensbeschreibung findet man noch allerhand ergänzende Mittheilungen sowie auch genaue Angaben über die von mir benutzten Quellen, sodass der Leser jederzeit ersehen kann, worauf sich meine Angaben stützen. Ein Sachregister und zwei Namenregister sind beigefügt, um die Benutzung des Buches so bequem wie möglich zu machen.

Soviel über Plan und Inhalt meines Buches; jetzt noch Einiges über dessen Entstehung.

Als Stäckel und ich im Jahre 1894 unser Buch ankündigten: „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie“, da behielten wir uns vor, dieses Unternehmen fortzusetzen und auch für die Geschichte der nichteuklidischen Geometrie selbst eine ähnliche Urkundensammlung zu schaffen, soweit sich das als thunlich erweisen möchte. Selbstverständlich dachten wir hierbei zunächst an die Schriften Lobatschefskijs und der beiden Bolyai, in denen die nichteuklidische Geometrie ihre erste systematische Begründung und Darstellung gefunden hat; jedoch waren wir damals noch weit entfernt, einen bestimmten Plan gefasst zu haben. Dazu ist es erst Anfang 1897 gekommen, wo Stäckel und ich verabredeten, er solle die beiden Bolyai übernehmen und in seinem Namen herausgeben, ich aber ebenso den Lobatschefskij in meinem Namen, jedoch solle Beides unter dem gemeinsamen Titel: „Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie“ erscheinen.

Zur Uebernahme des Lobatschefskij bestimmte mich vor allen

Dingen der Umstand, dass ich einigermassen mit der russischen Sprache vertraut war, da ich diese schon 1888—89 durch meinen Leipziger Kollegen Scholvin kennen gelernt hatte. Es gereicht mir zu besonderer Genugthuung, ihm jetzt durch Widmung dieses Buches einen wenn auch etwas verspäteten Beweis meiner Dankbarkeit zu liefern.

Meine Bekanntschaft mit den russischen Schriften Lobatschefskijs stammt aus dem Jahre 1895. Wassiljef schenkte mir nämlich damals ein Exemplar des vollständig vergriffenen ersten Bandes der gesammelten geometrischen Arbeiten Lobatschefskijs, der die Arbeiten in russischer Sprache enthält (Kasan 1883). Schon eine flüchtige Durchsicht dieser Arbeiten überzeugte mich, dass die deutsch oder französisch geschriebenen Abhandlungen nur ein sehr unvollkommenes Bild von den geometrischen Untersuchungen Lobatschefskijs gewähren, dass erst die russischen den ganzen Lobatschefskij zeigen, und dass man ihm Unrecht thut, wenn man ihn nur nach jenen beurteilt. Infolgedessen reifte in mir der Entschluss, die wichtigsten der russischen Arbeiten durch eine Uebersetzung den deutschen und damit auch den andern Mathematikern zugänglich zu machen. Doch hielt ich es für nöthig, mich auf diese umfangreiche und auch nicht ganz leichte Arbeit erst etwas vorzubereiten, indem ich zuvor ein paar kleinere russische Schriften übersetzte. Ich wählte dazu eine Rede von Wassiljef über Lobatschefskij (vgl. S. 423) und eine bisher gänzlich unbeachtet gebliebene Abhandlung von N. Sonin über partielle Differentialgleichungen 2. O. (s. die Math. Ann., Bd. 49, S. 417—447).

Anfänglich hatte ich geglaubt, mich zunächst mit einer Uebersetzung der „Neuen Anfangsgründe“ begnügen zu können. Allein mein historisches Gewissen erlaubte mir nicht, die erste Veröffentlichung Lobatschefskijs über nichteuklidische Geometrie bei Seite zu lassen, die 1829—30 im Kasaner Boten erschienene Arbeit „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie“. Diese Abhandlung war zwar sehr oft genannt worden, war aber doch bisher eigentlich Niemandem bekannt; selbst in Russland hat sie kaum jemand wirklich durchgearbeitet, und ausserhalb Russlands wusste man von ihr weiter nichts als den Titel. Freilich war ich mir auch von vornherein darüber klar, dass grade diese Arbeit nur durch Hinzufügung sehr ausführlicher Anmerkungen den Mathematikern schmackhaft gemacht werden konnte.

So entschied ich mich denn dafür, die beiden eben genannten Abhandlungen, die den Hauptinhalt des vorliegenden Werkes bilden, herauszugeben. Bei der Lösung dieser Aufgabe haben mich Stäckel und Wassiljef auf das Wirksamste unterstützt, wofür ihnen auch öffentlich meinen Dank auszusprechen mir wirkliches Bedürfniss ist.

Stäckel hat einzelne Theile meines Werkes, namentlich die Anmerkungen und die Nachweisungen zur Lebensbeschreibung Lobatschefskijs, schon im Manuskript durchgesehen; verschiedene grössere Zusätze, die von ihm herrühren, habe ich als solche durch Hinzufügung seines Namens kenntlich gemacht.

Von dem Ganzen hat er alle Korrekturen mitgelesen, und äusserst zahlreich sind in allen Theilen des Werks die Stellen, die durch ihn Verbesserungen und Berichtigungen erfahren haben. Dabei ist es ihm sehr zu Statten gekommen, dass er von der Kasaner Universität durch Vermittelung Wassiljefs ein Exemplar des ersten Bandes der geometrischen Werke Lobatschefskijs zum Geschenke erhalten hat. Auf seinen Wunsch bringe ich seinen Dank hierfür öffentlich zum Ausdruck.

Ausdrücklich erwähnen möchte ich noch eins. Stäckel hat alle die Rechnungen, die in der Arbeit „Ueber die Anfangsgründe“ und in den Anmerkungen dazu enthalten sind, nachgeprüft. Ich bin ihm dafür ganz besonders dankbar. Da nämlich der Urtext jener Arbeit durch eine beträchtliche Anzahl von Druckfehlern entstellt ist, so war es für mich keine geringe Mühe gewesen, überall die fehlenden Zwischenrechnungen zu ergänzen und die richtigen Formeln herzustellen. Einem Manne wie Lobatschefskij gegenüber kann man aber nicht misstrauisch genug gegen sich selbst sein: zuweilen fand ich schliesslich doch heraus, dass eine Formel, die ich zuerst für unrichtig gehalten hatte, in Ordnung war, oder dass eine anscheinend nicht passende Verweisung sich rechtfertigen liess. Man kann sich demnach denken, dass die von Stäckel durchgeführte Kontrole der Rechnungen mir eine grosse Beruhigung war.

Wie gross die Dankesschuld ist, in der ich mich Wassiljef gegenüber befinde, das habe ich, soweit es sich um meine Biographie Lobatschefskijs handelt, schon in der Einleitung zu dieser ausgesprochen. Ich will das hier nicht wiederholen, möchte aber noch einmal ausdrücklich hervorheben, dass ich ohne Wassiljefs Hülfe diese Biographie gar nicht geschrieben hätte, nicht hätte schreiben können. Aber auch sonst habe ich mich bei meiner ganzen Arbeit jederzeit der Unterstützung Wassiljefs erfreut. Eine Menge Notizen, die ich mir gar nicht zu verschaffen gewusst hätte, verdanke ich ihm, zum Beispiel für mein Verzeichniss der Lobatschefskijschen Schriften (S. 446—449). Auf einiges Andre will ich näher eingehen.

Schon während ich die beiden Abhandlungen Lobatschefskijs übersetzte und noch mehr, als ich sie wiederholt genau durcharbeitete, überzeugte ich mich, dass die Kasaner Ausgabe seiner geometrischen Arbeiten — milde ausgedrückt — an Korrektheit viel zu wünschen übrig

liess. Es galt daher auf die Originalausgaben zurückzugehen. Bei den „Neuen Anfangsgründen“ war das nicht schwer: aus der Berliner Königlichen Bibliothek erhielt ich in dankenswerther Weise die betreffenden Bände der Kasaner Gelehrten Schriften und fand dann auch, dass die Kasaner Gesammtausgabe an recht vielen Stellen den fehlerfreien Urtext entstellt, ja dass sie zuweilen ganze Zeilen einfach ausgelassen hatte. Nirgends aber war der Kasaner Bote aufzutreiben; es blieb mir daher nichts andres übrig, als alle die vielen Stellen, an denen der Text der mir vorliegenden Ausgabe fehlerhaft zu sein schien, einzeln aufzuschreiben und Wassiljef zu bitten, mir die Fassung der Originalausgabe mitzutheilen. Das hat er auf das Bereitwilligste und Sorgfältigste ausgeführt, so dass sich mir die Unzugänglichkeit des Kasaner Boten verhältnissmässig nicht sehr fühlbar gemacht hat.

Bei dieser Gelegenheit hat Wassiljef auch noch einen Sonderabdruck der Abhandlung „Ueber die Anfangsgründe“ verglichen, der sich im Besitze des Professors Petrofskij in Kasan befindet und der aus zwei Gründen merkwürdig ist. Erstens ist es das Exemplar, das Lobatschefskij dem damaligen Kurator der Kasaner Universität, Mussin-Puschkin (vgl. S. 384 ff.), überreicht hat; die eine der beiden Figurentafeln ist sogar von Lobatschefskij eigenhändig gezeichnet. Zweitens aber ist der Abdruck fortlaufend paginirt und an einer bestimmten Stelle sind sogar einige Seiten anders umbrochen als im Kasaner Boten. Mehrfach zeigt dieser Abdruck bemerkenswerthe Abweichungen vom Texte des Kasaner Boten. Druckfehler, die der eine enthält, fehlen im andern und umgekehrt. Es ist daher auch noch nicht ganz ausgemacht, in welcher Beziehung diese beiden Abdrücke, der im Kasaner Boten und der Petrofskijsche, zu einander stehen.

Für mich haben die Beziehungen Wassiljefs zu Petrofskij noch die äusserst angenehme Folge gehabt, dass Herr Professor Petrofskij mir im Sommer 1897 eine ganze Anzahl Hefte der Kasaner Gelehrten Schriften zum Geschenk gemacht hat, so dass ich jetzt glücklicher Besitzer eines vollständigen Exemplars der „Neuen Anfangsgründe“ in der Originalausgabe bin, sowie auch der Abhandlung Lobatschefskijs über die trigonometrischen Reihen (1834). Für dieses werthvolle Geschenk kann ich dem Geber nicht dankbar genug sein.

Endlich muss ich noch erwähnen, dass ich durch Wassiljef auch in den Stand gesetzt worden bin, meinem Werke ein bisher unbekanntes Bild von Lobatschefskij beizugeben. Wassiljef schickte mir eine Photographie, der ein nach dem Leben gemachtes Daguerrotyp zu Grunde liegt. Hierfür spricht, ausser der Ueberlieferung, auch noch der Umstand, dass das Bild den Orden auf der rechten Brust zeigt.

Allerdings war die Photographie, die ich erhalten hatte, nicht scharf genug, um eine unmittelbare photographische Vervielfältigung zu gestatten; aber ich habe mir geholfen, indem ich nach der Photographie eine Kreidezeichnung in etwa halber Lebensgrösse ausführen liess, und nach dieser Kreidezeichnung hat die Verlagsbuchhandlung die beigegebene Heliogravüre herstellen lassen. Die Heliogravüre giebt die Eigenthümlichkeiten jener Photographie vollkommen treu wieder, und wenn man sie mit dem Bilde vergleicht, das dem zweiten Bande der geometrischen Arbeiten Lobatschefskijs (Kasan 1886) beigegeben ist und das allerdings Lobatschefskij in jüngeren Lebensjahren darstellt, so wird man wohl keinen Augenblick darüber im Zweifel sein, welches von beiden Bildern sich durch grössere Lebenswahrheit auszeichnet.

Das Faksimile unter dem Bilde stammt aus Göttingen; entnommen ist es einem Bande von Dankschreiben, die an die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen von den neu erwählten Korrespondenten und auswärtigen Mitgliedern gerichtet worden sind (vgl. S. 399 und 436 f.). Die Königliche Universitätsbibliothek zu Göttingen, auf der dieser Band aufbewahrt wird, hat ihn mir in dankenswerther Weise zur Herstellung des Faksimiles zugänglich gemacht.

Schon hierdurch fühle ich mich auch der Göttinger Gesellschaft selbst zu Danke verpflichtet. Aber auch noch aus andern Gründen.

Im Stillen hatte ich immer noch die Hoffnung gehegt, dass im Gaussischen Nachlasse, der von der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften verwaltet wird, der Kasaner Bote vorhanden sein möchte. Veranlasst war ich dazu hauptsächlich durch gewisse Mittheilungen, die ich Anfang 1896 von Excellenz Otto Struve in Karlsruhe erhalten hatte (s. S. 381, 429, 435). Im November 1897 hatte ich durch das Entgegenkommen Felix Kleins Gelegenheit, mich zu überzeugen, dass ich mich nicht getäuscht. Klein machte mir nämlich den Nachlass von Gauss zugänglich, damit ich die vorhandenen Schriften Lobatschefskijs und etwaige auf diesen bezügliche Notizen für mein Buch verwerthen könnte. Da fand ich denn in der That ausser andern Lobatschefskijschen Abhandlungen auch die „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie“, zum Theil zwar nur in Abschrift, einen Theil aber auch im Originaldrucke, in zwei Heften des Kasaner Boten. Was ich bei der Vergleichung dieses Exemplars gefunden habe, ist den Anmerkungen zu meiner, damals schon gedruckten, Uebersetzung zu Gute gekommen. Ausserdem durfte ich auch die ungemein reichhaltige Sammlung von Briefen an und von Gauss für meine Zwecke benutzen, namentlich die Briefe von Gauss an Encke, Gerling und Olbers, sowie die Briefe von Bartels, Taurinus und Wachter an

Gauss, und bin auf diese Weise in den Stand gesetzt worden, genauen Bericht darüber zu erstatten, was Gauss über Lobatschefskij geäussert hat (s. S. 398f., 407, 432—434). Ich schmeichle mir, durch meine Nachforschungen, bei denen mich übrigens auch Stäckel wieder unterstützt hat, zur Beantwortung der Frage beigetragen zu haben, wie Gauss in den Besitz der Arbeiten von Lobatschefskij gekommen ist (s. S. 434—436, 437—440), und möchte diesen bescheidenen Beitrag zur Biographie von Gauss als einen kleinen Zoll des Dankes angesehen wissen, den ich der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen und Felix Klein insbesondere für die mir in liberalster Weise gestattete Benutzung des Gaussischen Nachlasses schulde. Dieser Beitrag ist allerdings sehr bescheiden, wenn ich damit vergleiche, welchen Nutzen ich selbst für meine Arbeit über Lobatschefskij aus dem Göttinger Material gezogen habe. Die Persönlichkeit Lobatschefskijs musste in den Augen der Mathematiker ganz wesentlich gewinnen, wenn ich von der Werthschätzung erzählte, die ihr Gauss hatte zu Theil werden lassen. In Gaussens Leben dagegen ist das Ganze nur eine ziemlich untergeordnete Episode, denn Gaussens eigne Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie liegt ja lange vor der Zeit, in der er mit Lobatschefskijs Arbeiten bekannt wurde, sogar noch vor der Zeit, die Lobatschefskij selbst zu dieser Entdeckung geführt hatte. Bewunderungswürdig aber bleibt es, wie neidlos Gauss hier und bei andern Gelegenheiten die Leistungen andrer anerkennt, bei denen er seine eignen, unveröffentlichten Entdeckungen wiederfindet!

Noch gar Manchem habe ich zu danken. Mein Freund H. Grassmann in Halle a. S. ist so liebenswürdig gewesen, die Figuren zu den Anmerkungen zu zeichnen. Einzelne Beiträge und Mittheilungen verdanke ich ferner den Herren M. Brendel in Göttingen, A. Knorr in Petersburg, V. Knorre in Berlin, R. Lipschitz in Bonn, F. Schmidt in Buda-Pest, A. Tresse in Paris. Bei meinen Nachforschungen nach der Familie E. Knorrs, weiland Professors in Kasan, haben mich unterstützt die Herren: Oberpfarrer Höppner in Mittweida i. S., Hofrath von Larisch in Kötzschenbroda bei Dresden, Pastor E. Gelderblom in Petersburg. Endlich haben meine Leipziger Kollegen Scholvin und Wollner mir über allerhand sprachliche und sachliche Fragen Auskunft ertheilt.

Die Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner ist, wie immer, auch diesmal in Bezug auf die Einrichtung und Ausstattung des Buches allen meinen Wünschen entgegengekommen.

Leipzig, im Januar 1899.

Friedrich Engel.



